इकाई 15 रैखिक अंतर समीकरण*

संरचना

15.0 उद्देश्य

15.1 विषय-प्रवेश

15.2 प्रारंभिक अवधारणाएँ (Preliminary Concepts)

15.3 एक-घातीय अंतर समीकरण (First Order Difference Equations)

15.31 पुनरावृत्तीय विधि (The Iterative Method)

15.3.2 सामान्य/व्यापक विधि (The General Method)

15.4 द्विघातीय अंतर समीकरण (Second Order Difference Equations)

15.5 अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग (Economic Applications)

15.51 मक्कड़ जाल (कॉबवेब प्रतिमान The Cobweb Model)

15.5.2 सैम्युलसन गुणक-त्वरण (परस्पर प्रभाव) प्रतिमान (Samuelson Multiplier-Accelerator Interaction Model)

15.6 सार-संक्षेप

15.7 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

15.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात्, आप सक्षम होंगे :

- परिमित अंतरों की संकल्पना करने में;
- असतत् आर्थिक प्रक्रियाओं की व्याख्या करने में;
- किसी अंतर समीकरण की घात/क्रम की परिभाषा करने में;
- घात एक तथा दो के अंतर समीकरण की पहचान करने में;
- समघाती और असमघाती अंतर समीकरण में अंतर करने में;
- एक-घात तथा द्वि-घात वाले अंतर समीकरणों को हल करने की विधियाँ समझाने में; तथा
- असत् समय में होने वाली आर्थिक प्रक्रियाओं के अंतर समीकरणों के रूप में निरूपण तथा उनके हल करने में।

15.1 विषय-प्रवेश

अब तक आप अवकलन गणित तथा समाकलन का अध्ययन कर चुके हैं और इनकी सहायता से अर्थशास्त्र से संबंधित समस्याओं/प्रश्नों का हल ज्ञात करना भी सीख चुके हैं। आपने यह भी देखा कि किस प्रकार समाकलन, अवकलन का व्युत्क्रम प्रक्रम है। यदि हम यह जानना चाहें कि एक दिया हुआ फलन वर्धमान है अथवा ह्रासमान, तो यह निर्भर चर के स्वतंत्र चर के सापेक्ष अवकलज के चिन्ह के आधार पर ज्ञात किया जा सकता है। यदि हम किसी दिए हुए फलन के अधिकतम अथवा न्यूनतम मान के बारे में निर्णय करना चाहें तो भी हम फलन के विभिन्न अवकलजों की सहायता लेते हैं।

*श्री जगमोहन रॉय

अतः, अवकलन गणित की सभी विधियाँ अवकलज की संकल्पना पर आधारित है। परंतु यदि y, x का एक फलन है तो हम इसका अवकलज तभी ज्ञात कर सकते हैं जब x एक सतत् चर हो अर्थात् x में परिवर्तन अत्यंत ही सूक्ष्म हों। ऐसी स्थिति में, एक अंतराल में x के प्रत्येक मान के लिए y परिभाषित होता है। परंतु यह आवश्यक नहीं कि स्थिति सदा ऐसी ही हो।

अर्थशास्त्र में, हमें अनेक बार ऐसी स्थितियों का सामना करना पड़ता है जब स्वतंत्र चर सतत न होकर असतत हो। अर्थात् यह संभव है कि x दो मान 2 और 4 तो लें, परंतु 2 और 4 के बीच में कोई ओर मान न लें। ऐसी स्थिति में, यदि y, x का एक फलन है तो y पूरे अंतराल (2, 4) पर परिभाषित नहीं होगा अपितु ये $x = 2$ तथा $x = 4$ पर ही परिभाषित हो पाएगा। उदाहरण के लिए, मान लीजिए हम एक परिवार द्वारा की जाने वाली बचत के बारे में अध्ययन कर रहे हैं और हम निश्चित समय के अंतर पर, जैसे कि प्रतिवर्ष आँकड़े इकट्ठा करते हैं। इस प्रकार, यदि S परिवार की, समय अंतराल t पर, बचत को निरूपित करता है हमें $S = S(t)$ के रूप में प्राप्त होता है जहाँ t, 0,1,2…इत्यादि मान लेता है। अतः, t एक अससत चर है। हमारी रुचि स्वतंत्र चर के मान में परिवर्तन करने से, y के मान में होने वाले परिवर्तन का अध्ययन करने में हो सकती है। परंतु अवकलज की संकल्पना यहाँ काम नहीं करेगी क्योंकि यहाँ स्वतंत्र चर सतत न होकर असतत है। जब किसी फलन में स्वतंत्र चर कुछ परिमित संख्याएँ, छोड़-छोड़ कर परिवर्तित होता है, तो इस प्रकार प्राप्त फलन के मानों के बीच संबंध परिमित अंतर फलन (finite differences) की विषय-वस्तु है।

हम इस तथा अगली इकाई में अंतर समीकरणों के बारे में जानेंगे तथा उन्हें हल करने की विधियाँ सीखेंगे। हम अर्थशास्त्र की कुछ ऐसी स्थितियों का भी अध्ययन करेंगे जहाँ अंतर समीकरण उपयोगी सिद्ध होते हैं। इस इकाई में हम अंतर समीकरणों की ही चर्चा करेंगे।

15.2 प्रारंभिक अवधारणाएँ / संकल्पनाएँ (PRELIMINARY CONCEPTS)

अब हम ऐसे फलनों पर विचार करेंगे जिनमें स्वतंत्र चर सतत न होकर असतत् है; ऐसे फलन जिनमें y निर्भर चर तथा x एक पूर्णांक मान लेने वाला चर होगा। ऐसी स्थिति में निर्भर चर y में परिवर्तन का स्वरूप का निर्धारक फलन $y(x)$ के अवकलज के स्थान पर 'अंतर' के द्वारा किया जाएगा।

मान लीजिए $y = f(x)$ है, अर्थात् y, x का एक फलन है जहाँ x समान दूरी पर स्थित (समदूरस्थ) पूर्णांक मान $x_0, x_0+h, x_0+2h, \ldots, x_0+nh$ लेता है।

अतः $f(x_0), f(x_0+h), f(x_0+2h), \ldots, f(x_0+nh)$, x के मानों के संगत y के मान होंगे जिन्हें $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ से व्यक्त किया जाता है।

अंतर $y_1 - y_0, y_2 - y_1, \ldots, y_n - y_{n-1}$ फलन $y = f(x)$ के ***प्रथम अग्र अंतर*** कहलाते हैं जिन्हें हम क्रमशः $\Delta y_0, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_n$ व्यक्त करते हैं। यही वह अंतर हैं तो असतत चर x में होने वाले परिवर्तनों के सापेक्ष y के परिवर्तनों को निरूपित करते हैं।

व्यापक रूप में प्रथम अग्र अंतर को $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$, अथवा $\Delta f(x) = \Delta f(x + h) - f(x)$, द्वारा परिभाषित किया जाता है, यहाँ h अंतर का अंतराल है।

अर्थात् यह x के दो क्रमानुगत मानों के बीच का अंतर है।

इसी प्रकार Δy या $\Delta f(x)$ मूल रूप में, असतत स्वतंत्र चर के दो क्रमानुगत मानों पर फलन $y = f(x)$ के मानों का अंतर है।

उदाहरण के लिए, एक अनुक्रम $-5, -1, 3, 7, \ldots, (4x + 3), \ldots$ लें।

यहाँ, $y = f(x) = 4x + 3$ तथा $h = 4$ है (यह अनुक्रम के किन्हीं दो क्रमानुगत मानों का व्यवकलन करके ज्ञात किया जा सकता है)

$$\Delta y \text{ or } \Delta f(x) = \Delta f(x + h) - f(x)$$

$$= [4(x + h) + 3] - [4x + 3]$$

$$= 4x + 4h + 3 - 4x - 3$$

$$= 4h = 16 \qquad [\because h = 4 \text{ (परिकलित मान)}]$$

इसी प्रकार हैं **द्वितीय अग्र अंतर,** $\Delta^2 y_n$ को $\Delta(\Delta y_n)$ के रूप में परिभाषित करते हैं, अर्थात्

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta(y_{n+1} - y_n)$$
$$= (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n)$$
$$= y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

इसी प्रकार हम और अधिक उच्च क्रम/घात के अग्र अंतरों को परिभाषित कर सकते हैं। क्योंकि हमारा मुख्य उद्देश्य अर्थशास्त्र संबंधी प्रश्नों/समस्याओं का अध्ययन करना है, हमारी रुचि बहुधा समय के साथ होने वाले परिवर्तन के किसी प्रतिरूप के सापेक्ष/अनुरूप, चर y के लिए एक समय-पथ ज्ञात करने में होगी। इसके लिए हम स्वतंत्र चर को t से निरूपित करते हैं और $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$ लिखते हैं। अतः, पिछले उदाहरण में हम लिख $\Delta y_t = 16$ सकते हैं। ऐसे समीकरण **अंतर समीकरण** कहलाते हैं। किसी अंतर समीकरण की घात, उस समीकरण में उपस्थित सबसे अधिक घात वाले अंतर की घात के बराबर होती है। उदाहरण के लिए, $\Delta^2 y_t = 4$ एक द्विघाती अंतर समीकरण है।

अंतर समीकरण $\Delta y_t = 16$ …(a)

को निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है

$y_{t+1} - y_t = 16$ या $y_{t+1} = y_t + 16$ …(b)

इसी प्रकार, अंतर समीकरण $\Delta y_t = -0.3 y_t$ …(c)

को $y_{t+1} - y_t = -0.3\, y_t$ या $y_{t+1} = 0.7\, y_t$ …(d)

के रूप में भी लिखा जा सकता है।

एक अंतर समीकरण **समघाती** कहलाता है यदि इसका अचर पद (वह पद जिसमें y उपस्थित न हो) शून्य हो किन्तु अचर पद की उपस्थिति उसे असमघाती बना देती है। अतः हम एक अंतर-समीकरण को एक ऐसे समीकरण के रूप में परिभाषित कर सकते है जिसमें एक स्वतंत्र चर, एक निर्भर चर और निर्भर चल के क्रमिक अंतर हों। साथ ही, हमने देखा कि किसी निर्भर चर के क्रमिक अंतर, उसके क्रमिक मानों के पदों में व्यक्त

किए जा सकते हैं। उदाहरण के लिए, समीकरण (a) को समीकरण (b) के रूप में तथा समीकरण (c) को समीकरण (d) के रूप में लिखा जा सकता है। अतः, हम एक अंतर समीकरण को एक ऐसे समीकरण के रूप में परिभाषित कर सकते हैं जो एक स्वतंत्र चर तथा निर्भर चर के क्रमिक मानों के बीच संबंध को व्यक्त करता है। इस रूप में (अर्थात् समीकरणों (a) और (b) के रूप में) व्यक्त अंतर समीकरणों को हल करना अधिक सुविधाजनक है। ध्यान दें कि $\Delta^2 y_t = 4$ को $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 4$ के रूप में लिखा जा सकता है।

किसी अंतर समीकरण का हल स्वतंत्र और निर्भर चरों के बीच में एक ऐसा संबंध होता है जो दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करें। n घात वाले किसी अंतर समीकरण के व्यापक हल में n यादृच्छिक अचर होते हैं। उदाहरण के लिए, $\Delta^2 y_t = 0$ एक घात-2 का समघाती अंतर समीकरण है और $\Delta y_t = 4$ एक घात-2 वाला असमघाती समीकरण है। एक अंतर समीकरण रैखिक कहलाता है यदि समीकरण में उपस्थित प्रत्येक y की घात 1 हो। हम सर्वप्रथम घात 1 वाले अंतर समीकरणों को हल करना सीखेंगे। आइए, हम विभिन्न प्रकार के अंतर समीकरणों के बारे में जानें और एक-एक करके उन्हें हल करना सीखें।

15.3 एक-घातीय अंतर समीकरण (First Order Difference Equations)

इस खंड में हम घात 1 वाले अंतर समीकरणों को हल करना सीखेंगे। हम सर्वप्रथम घात 1 वाले अंतर समीकरणों को हल करने की पुनरावृत्ति करने वाली विधि सीखेंगे।

15.3.1 पुनरावृत्तीय विधि (The Iterative Method)

हम इस विधि की व्याख्या एक उदाहरण के माध्यम से करेंगे। एक अंतर समीकरण $\Delta y_t = 4$ लीजिए।

जैसा कि हम देख चुके हैं, इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$y_{t+1} = y_t + 4 \qquad \ldots(i)$$

समीकरण (i) में $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y_1 = y_0 + 4$$

$$y_2 = y_1 + 4 = (y_0 + 4) + 4 = y_0 + 2(4)$$

$$y_3 = y_2 + 4 = y_0 + 2(4) + 4 = y_0 + 3(4)$$

व्यापक रूप में, हम पाते हैं

$$y_t = y_0 + 4t \qquad \ldots(ii)$$

अब मान लीजिए $y_0 = 20$ है। समीकरण (ii) में y_0 का यह मान रखने पर, हम पाते हैं कि

$$y_t = 20 + 4t \qquad \ldots(iii)$$

y_0 का कल्पित मान y_0 पर दिए हुए अंतर समीकरण $\Delta y_t = 4$ का, एक हल है। ध्यान दें कि समीकरण (iii) में प्राप्त हल हमें t के प्रत्येक मान के लिए y का मान देता है। यदि प्रारंभिक मान y_0 न दिया हो, तो हल y_0 के पदों में प्राप्त होगा।

उदाहरण के लिए, अंतर समीकरण

$$\Delta y_t = -0.3\, y_t \qquad \ldots(\text{iv})$$

को हम

$$y_{t+1} - y_t = -0.3\, y_t \text{ या } \quad y_{t+1} = 0.7\, y_t \qquad \ldots(\text{v})$$

के रूप में लिख सकते हैं तथा इसे पुनरावृत्तीय विधि के द्वारा निम्नलिखित रूप से हल किया जा सकता है :

समीकरण (v) में $t = 0, 1, 2, \ldots$ इत्यादि रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$y_1 = 0.7 y_0$
$y_2 = 0.7 y_1 = (0.7)^2 y_0$
$y_3 = (0.7)^3 y_0$

इत्यादि। व्यापक रूप में, हम देखते हैं कि

$$y_t = (0.7)^t\ y_0$$

जो y_0 के पदों में अंतर समीकरण (iv) का हल है।

अब हम घात एक के किसी अंतर समीकरण को हल करने की सामान्य विधि/प्रमुख विधि का वर्णन करेंगे।

15.3.2 सामान्य विधि (The General Method)

मान लीजिए $y_{t+1} + a_0 y_1 = a$ …(vi)

घात एक का एक अंतर समीकरण है, जहाँ a_0 और a अचर है। अंतर समीकरण (vi) के व्यापक हल में दो भाग होते हैं : एक विशिष्ट/विशेष समाकलन y_p तथा एक पूरक फलन y_c . पूरक फलन, दिए हुए अंतर समीकरण (vi) से संबंधित समघाती अंतर समीकरण (vii) के व्यापक हल को कहते हैं।

$$y_{t+1} + a_0 y_t = 0 \qquad \ldots(\text{vii})$$

जबकि, विशिष्ट समाकलन, y_p दिए हुए असमघातीय अंतर समीकरण (vi) का कोई भी एक हल होता है। समीकरण (vi) का व्यापक हल y_c तथा y_p का योग होता है। यह विधि सामान्य विधि कहलाती है क्योंकि यह हमें, घात 1 के सबसे व्यापक रूप में दिए हुए रैखिक अंतर समीकरणों को हल करने में सहायता करती है। केवल इतना ही नहीं, यह विधि एक से अधिक घात वाले रैखिक अंतर-समीकरणों पर भी लागू होती है। क्योंकि हमें घात 2 वाले अंतर समीकरणों का भी अध्ययन करना है तथा उनके हल ज्ञात करने हैं और क्योंकि यह विधि घात 1 और घात 2 वाले रैखिक अंतर समीकरणों के लिए समान है, हम इस विधि की चर्चा बाद में करेंगे जिससे आवश्यक पुनरावृत्ति से बचा जा सके। वास्तव में, यह विधि दो से अधिक घात वाले अंतर समीकरणों के लिए भी मान्य है।

बोध प्रश्न 1

1) समघाती तथा असमघाती अंतर समीकरणों में क्या अंतर है? स्पष्ट करें।

.....

.....

.....

.....

.....

2) नीचे दिए रैखिक अंतर समीकरणों को हल कीजिए :

i) $y_{t+1} - 6y_t = 0$

ii) $\Delta y_t = 0$

iii) $y_{t+1} = 10 + y_t$

iv) $\Delta y_t = 2y_t$

.....

.....

.....

.....

.....

15.4 द्विघात अंतर समीकरण (Second Order Difference Equations)

ऐसे अंतर समीकरण जिनमें y_t के y_{t+2} से अधिक क्रमिक मान उपस्थित न हों, द्विघातीय अंतर समीकरण कहलाते हैं। द्विघाती अंतर समीकरणों के कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं :

i) $u_{t+2} - 3u_{t+1} + 5u_t = 10t$

ii) $y_{t+2} - 4y_t = 0$

iii) $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 4y_t = 6 + t$

iv) $y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 12^t$

व्यापक रूप में, कोई भी अचर गुणांकों वाला द्विघाती रैखिक असमघाती अंतर समीकरण इस प्रकार का होता है :

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = \phi(t) \qquad \ldots(\text{viii})$$

जहाँ, a_1 तथा a_2 अचर है और $\phi(t)$ केवल t का कोई फलन है। यदि $\phi(t) = 0$ हो तो हम पाते हैं

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0 \qquad \ldots(\text{ix})$$

जो कि अचर गुणांकों वाला घात 2 का रैखिक, समघाती अंतर समीकरण है। समीकरण (viii) का व्यापक हल भी $y_c + y_p$ प्रकार का होता है जहाँ y_c समीकरण (ix) का व्यापक हल है तथा y_p (viii) का कोई भी हल है। हम पहले समीकरण (ix) को हल करने की विधि सीखेंगे। यह विधि पूर्णतया व्यापक है क्योंकि इसका उपयोग किसी भी घात वाले समघाती रैखिक अंतर समीकरण को हल करने के लिए किया जा सकता है, जिसमें एकघात वाले समीकरण (i) भी सम्मिलित हैं। यह विधि इस प्रकार है :

चरण 1 : अंतर समीकरण (ix) में y_t के स्थान पर $1, y_{t+1}$ के स्थान पर कोई भी चर, उदाहरण के लिए, b तथा y_{t+2} के स्थान पर b^2 रखें। इससे हमें नीचे दिया हुआ अभिलक्षिणक समीकरण प्राप्त होता है :

$$b^2 + a_1 b + a_2 = 0 \qquad \ldots(x)$$

चरण 2 : अभिलक्षिणक समीकरण (x) को हल करें। इस प्रकार प्राप्त b के मानों को अभिलक्षिणक मूल कहते हैं।

चरण 3 : समीकरण (ix) का व्यापक हल चरण 2 में प्राप्त विशिष्ट मूलों का प्रयोग करके प्राप्त किया जा सकता है। यह हल अभिलक्षिणक मूलों की प्रकृति पर आधारित होता है। हमारे पास तीन संभावित स्थितियाँ होती हैं –

स्थिति I : यदि चरण 2 में प्राप्त मूल वास्तविक तथा भिन्न हैं, मान लीजिए, b_1 और b_2 तो (ix) का व्यापक हल इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$y = A_1 b_1^t + A_2 b_2^t \qquad \ldots(xi)$$

स्थिति II : यदि चरण 2 में प्राप्त मूल वास्तविक परंतु समान है, मान लीजिए, b_1 तथा $b_2 = b_1$ तो

$$y = (A_1 + t\ A_2) b_1^t \qquad \ldots(xii)$$

स्थिति III : यदि चरण (2) में प्राप्त मूल सम्मिश्र संख्याएँ हों, मान लीजिए $b_1 = \alpha + i\beta$ और $b_2 = \alpha - i\beta$

$$y = A_1(\alpha + i\beta)^t + A_2(\alpha - i\beta)^t \qquad \ldots (xiii)$$

इसे हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$y = r^t (C_1 \cos\theta t + C_2 \sin\theta t) \qquad \ldots(xiv)$$

जहाँ, $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, $C_1 = A_1 + A_2$, $C_2 = i(A_1 - A_2)$

टिप्पणी :

1) A_1, A_2, C_1, C_2 जिनका उपयोग ऊपर किया गया है, सभी अचर है।

2) स्थिति III में मूल $\alpha + i\beta$ और $\alpha - i\beta$ लिए गए हैं। यहाँ α और β वास्तविक संख्याएँ हैं। वास्तव में, जब भी किसी वास्तविक गुणांकों वाले द्विघात समीकरण के सम्मिश्र मूल हों, तो वे $\alpha \pm i\beta$ के प्रकार के ही होंगे।

3) यहाँ पर समान सम्मिश्र मूलों वाली स्थिति की चर्चा नहीं की गई क्योंकि ऐसे समीकरण की घात कम से कम 4 होनी चाहिए और हमारा अध्ययन के केवल दो घात वाले समीकरणों तक ही सीमित है।

4) जब हम ऐसे असमघाती अंतर समीकरणों की बात करते हैं जैसा कि समीकरण (viii) में दिया है, तो समीकरण (ix) में दिए समघाती समीकरण के व्यापक हल को (viii) का पूरक फलन कहते हैं तथा इसे y_c से व्यक्त किया जाता है। अतः हम (xi), (xii), (xiii) और (iv) में प्राप्त हलों को y_c में व्यक्त करेंगे।

आइए, अब हम कुछ उदाहरणों के माध्यम से इस विधि को समझें।

उदाहरण 1 $y_{t+2} - 4y_t = 0$ को हल कीजिए।

हल : $y_t = 1$ तथा $y_{t+2} = b^2$ लेने पर इस अंतर समीकरण का अभिलक्षिणक समीकरण होगा :

$$b^2 - 4 = 0 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

इसके मूल $b_1 = 2$ तथा $b_2 = -2$ हैं जो कि वास्तविक तथा भिन्न हैं। अतः दिए हुए अंतर समीकरण का व्यापक हल होगा :

$$y = A_1 2^t + A_2 (-2)^t$$ [समीकरण (xi) का उपयोग करने पर]

उदाहरण 2 $y_{t+2} + 10\, y_{t+1} + 25\, y_t = 0$ को हल कीजिए।

हल $y_t = 1, y_{t+1} = b$ तथा $y_{t+2} = b^2$ लेने पर

$$b^2 + 10b + 25 = 0$$

इस समीकरण को हल करने पर, हमें एक आवर्ति मूल -5 प्राप्त होता है। अतः इस समीकरण का व्यापक हल है :

$$y = (A_1 + t\, A_2)\, (-5)^t$$ [समीकरण (xii) का उपयोग करने पर]

उदाहरण 3 $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 13y_t = 0$ को हल करें।

हल दिए हुए अंतर समीकरण के लिए अभिलक्षिणक समीकरण है :

$$b^2 - 4b + 13 = 0$$

इसे हल करने पर हम पाते हैं कि इसके मूल निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याएं हैं, $b_1 = 2 + 3i,\ b_2 = 2 - 3i.$

$\therefore\ \alpha = 2$ तथा $\beta = 3$ है। इससे हमें प्राप्त होता है कि $r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ है

$\therefore$ दिए गए समीकरण का व्यापक हल होगा :

$$y = \sqrt{13}\, (C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t), \text{ जहाँ } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$$

[समीकरण (xiv) उपयोग करने पर]

अब हम (viii) के प्रकार को द्विघातीय असमघाती रैखिक अंतर समीकरणों के हल ज्ञात करना सीखेंगे। जैसा कि पहले बताया गया है कि अंतर समीकरण (viii) के व्यापक हल में दो भाग y_c और y_p होते हैं। यहाँ, y_c अर्थात् पूरक फलन (viii) के संगत समघाती अंतर समीकरण (ix) का व्यापक हल होता है जिस निकालने की/ज्ञात प्राप्त करने की विधि हम सीख चुके हैं। अब हम अंतर समीकरण (viii) के विशिष्ट समाकलन, y_p को ज्ञात करने की विधि पर विचार करते हैं। वास्तव में, y_p का परिकलन अंतर समीकरण (viii) के दाएं पक्ष में दिए फलन $\phi(t)$ पर निर्भर करता है। हम केवल कुछ विशेष प्रकार के फलनों $\phi(t)$ के लिए ही, विशिष्ट समाकलन y_p ज्ञात करने की विधियाँ सीखेंगे। ये विशेष प्रकार, इस प्रकार हैं :

स्थिति 1 : जब $\phi(t)$ एक अचर फलन है।

स्थिति 2 : जब $\phi(t)$ एक बहुपद फलन है। (ध्यान दें कि स्थिति 1, स्थिति 2 की एक विशेष स्थिति है)

स्थिति 3 : जब $\phi(t)$, a^t के प्रकार का एक घातीय फलन है, जहाँ a एक अचर है।

स्थिति 4 : जब $\phi(t)$, एक बहुपद तथा a^t का गुणनफल है, जहाँ a एक अचर है।

हम इन स्थितियों की चर्चा एक-एक करके करेंगे। क्योंकि हम अंतर समीकरण (viii) के किसी भी हल को y^p ले सकते हैं, अतः ऊपर उल्लेखित सभी स्थितियों के लिए y^p ज्ञात करने की विधियाँ सीखेंगे।

स्थिति 1 : जब $\phi(t)$ एक अचर है, मान लीजिए (a), तो हम $y_t = k$ को समीकरण (iii) का एक संभावित हल मान लेते हैं, जहाँ k एक अचर है जिसका मान (viii) में $y_t = k$ रखकर निकाला जा सकता है।

आइए, हम इस प्रक्रिया को एक उदाहरण के माध्यम से समझें।

उदाहरण 4 $y_{t+2} - 4y_t = 5$ को हल करें।

हल : ध्यान दें कि हमें एक असमघाती अंतर समीकरण दिया हुआ है। इस समीकरण के संगत समघाती समीकरण है :

$$y_{t+2} - 4y_t = 0$$

यह वही अंतर समीकरण है जिसे हमने उदाहरण 1 में हल किया है। अतः हमें इस समघाती समीकरण के अभिलक्षिणक मूल पहले से ही ज्ञात है तथा हमें निम्नलिखित पूरक फलन प्राप्त होता है,

$$\therefore y_c = A_1 2^t + A_2(-2)^t$$

अब हम विशिष्ट समाकलन ज्ञात करते हैं। क्योंकि $\phi(t) = 5,$ है

$$y_t = k$$

को हम दिए हुए समीकरण का विशिष्ट समाकलन ज्ञात करने के लिए एक परीक्षण हल के तौर पर चुनते हैं।

$$y_t = k \;=\; y_{t+2} = k \qquad \text{[क्योंकि } y \text{ एक अचर फलन है]}$$

अब y_t और y_{t+2} को दिए हुए असमघाती अंतर समीकरण में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$k - 4k = 5$$

$$k = \frac{-5}{3}$$

$$\therefore y_p = \frac{-5}{3}$$

जो कि दिए हुए अंतर समीकरण का विशिष्ट समाकलन y_p है। अतः, अंतर समीकरण $y_{t+2} - 4y_t = 5$ का पूर्ण हल है :

$$y_t = y_c + y_p \qquad = A_1 2^t + A_2 (-2)^t - \frac{5}{3}$$

स्थिति 2 : जब $\phi(t)$, t में घात n का एक बहुपद हो, तो हम घात n वाले व्यापक बहुपद $y_t = p_0 + p_1 t + \ldots\ldots p_n t^n$ को एक संभावित विशिष्ट समाकलन के रूप में लेते हैं और दिए हुए समीकरण में यह रखकर अचर $p_0, p_1, \ldots\ldots, p_n$ आंकलित कर लेते हैं।

उदाहरण 5 : $y_{t+2} + 10y_{t+1} + 25y_t = 1 + t^2$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल : इस अंतर समीकरण का पूरक फलन $y_c = (A_1 + t\,A_2)\,(-5)^t$ हम उदाहरण 2 में पहले ही ज्ञात कर चुके हैं। विशिष्ट समाकलन ज्ञात करने के लिए हम घात 2 का व्यापक बहुपद $y_t = p_0 + p_1 t + p_2 t^2$ लेते हैं क्योंकि $\phi(t) = 1 + t^2$, एक घात 2 का बहुपद है। इस उदाहरण में दिए हुए अंतर समीकरण में y_t के अतिरिक्त, y_{t+1} तथा y_{t+2} वाले पद भी उपस्थित हैं। अतः हमें इनके मान इस व्यापक बहुपद से ज्ञात करने होंगे :

$$y_{t+1} = p_0 + p_1(t+1) + p_2(t+1)^2$$

$$= (p_0 + p_1 + p_2) + (p_1 + 2\,p_2)t + p_2\,t^2$$

$$y_{t+2} = p_0 + p_1(t+2) + p_2(t+2)^2$$

$$= (p_0 + 2\,p_1 + 4p_2) + (p_1 + 4\,p_2)t + p_2\,t^2$$

अब y_t, y_{t+1} और y_{t+2} के मान अपने अंतर समीकरण में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$[(p_0 + 2\,p_1 + 4p_2) + (p_1 + 4\,p_2)t + p_2\,t^2] + 10\,[(p_0 + p_1 + p_2) + (p_1 + 2\,p_2)t + p_2\,t^2] + 25\,[p_0 + p_1 t + p_2 t^2] = 1 + t^2$$

बायीं ओर के समान पदों के गुणंक एकत्र कर हम पाते हैं :

$$(36p_0 + 12\,p_1 + 14\,p_2) + (36\,p_1 + 24\,p_2)t + (36\,p_2)t^2 = 1 + t^2$$

बाएं पक्ष में एकसमान घात वाले पदों को एक साथ लिखने पर हम प्राप्त करते हैं

$$36p_0 + 12p_1 + 14p_2 = 1$$
$$36p_1 + 24p_2 = 0$$
$$36p_2 = 1$$

इन समीकरणों को हल करने पर, हम पाते हैं कि

$$p_2 = \frac{1}{36}, \qquad p_1 = \frac{-1}{39}, \qquad p_0 = \frac{-19}{8424}$$

अतः, हम दिए हुए अंतर समीकरण का विशिष्ट समाकलन

$$y_p = \frac{-19}{8424} + \frac{-1}{39}\, t + \frac{1}{36}\, t^2$$

के रूप में प्राप्त करते हैं।

अतः दिए हुए अंतर समीकरण $y_{t+2} + 10y_{t+1} + 25y_t = 1 + t^2$ का पूर्ण हल होगा :

$y_t = y_c + y_p$

$$y_t = (A_1 + t\,A_2)\,(-5)^t + [\frac{-19}{8424} + \frac{-1}{39}\, t + \frac{1}{36}\, t^2]$$

स्थिति 3 : जब $\phi(t) = a^t$ हो, जहाँ a एक अचर है।

इस स्थिति में परीक्षण फलन का चयन इस बात पर निर्भर करेगा कि a दिए हुए अंतर समीकरण के अभिलक्षिणक समीकरण का मूल है अथवा नहीं। यदि a अभिलक्षिणक समीकरण का मूल नहीं है, तो हम $y_t = ca^t$, को परीक्षण फलन के रूप में लेंगे, जहाँ पर c एक ऐसा अचर है जिसका निर्धारण किया जाना है।

दूसरी ओर, यदि a अभिलक्षिणक समीकरण का एक मूल है, तो हम सर्वप्रथम जाँच करते हैं कि मूल a आवर्ती है अथवा नहीं। यदि a की पुनरावृत्ति m बार होती है तो हम $y_t = ct^m a^t$ को परीक्षण फलन के तौर पर लेते हैं। उदाहरण के लिए, यदि a की अभिलक्षिणक समीकरण के मूल के रूप में दो बार आवृति होती है तो $m = 2$ होगा और हम $y_t = ct^2 a^t$ परीक्षण फलन को लेंगे। यदि अभिलक्षिणक समीकरण का ऐसा मूल है जो आवृत्ति नहीं है तो $m = 1$ होगा तथा हम $y_t = cta^t$ को परीक्षण फलन के रूप में लेते हैं।

हम इस विधि को समझने के लिए दो उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 6 : $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 7^t$ को हल करें।

हल : यह सरलता से देखा जा सकता है कि दिए हुए अंतर समीकरण के अभिलक्षिणक समीकरण के दो वास्तविक और भिन्न मूल $b_1 = 3$ तथा $b_2 = 2$ होंगे। अतः, इसका पूरक फलन

$$y_c = A_1 3^t + A_2 2^t \qquad \text{[समीकरण (xi) का उपयोग करने पर]}$$

होगा।

y_p ज्ञात करने के लिए ध्यान दें कि यहाँ $\phi(t) = 7^t$ है तथा 7 दिए हुए अंतर समीकरण से संबंधित अभिलक्षिणक समीकरण का मूल नहीं है। अतः हम :

$$y_t = c7^t$$

का चयन परीक्षण फलन के तौर पर करते हैं। इस परीक्षण फलन से हम y_{t+1} तथा y_{t+2} के मान ज्ञात करते हैं और पाते हैं कि

$$y_{t+1} = c.7^{t+1}$$

$$y_{t+2} = c.7^{t+2}$$

अब y_t, y_{t+1} और y_{t+2} का मान दिए हुए अंतर समीकरण में रखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$c.7^{t+2} - 5.c.7^{t+1} + 6.\ c.7^t = 7^t$$

दोनों पक्षों को 7^t, विभाजित करने पर, हम प्रापत करते हैं

$$49\ c - 35\ c + 6\ c = 1 \quad \Rightarrow \qquad c = \frac{1}{20}$$

$\therefore y_p = \frac{1}{20}.\ 7^t$ अपेक्षित विशिष्ट समाकलन particular integral (PI) है।

अतः दिए हुए अंतर समीकरण का पूर्ण हल $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 7^t$ प्राप्त होता है।

$$y_t = CF + PI$$

$$= A_1 3^t + A_2 2^t + \frac{1}{20} 7^t$$

उदाहरण 7 $y_{t+2} - 7\ y_{t+1} + 10\ y_t = 3\times 5^t$ को हल कीजिए।

हल : यहाँ, विशिष्ट समीकरण के मूल 2 और 5 है। अतः, हमें पूरक फलन (C.F.)

$y_c = A_1 2^t + A_2 5^t$ प्राप्त होता है।

अब, $\emptyset(t) = 3\times 5^t$ है और 5^t में उपस्थिति 5 विशिष्ट समीकरण का अनावर्ती मूल है। अतः, हम $y_t = cta^t$ को परीक्षण फलन के रूप में लेते हैं क्योंकि यहाँ $m = 1$ है। अतः

$$y_t = c.t.5^t$$

$$\Rightarrow \qquad y_{t+1} = c.(t+1).5^{t+1}$$

$$\Rightarrow \qquad y_{t+2} = c.(t+2).5^{t+2}$$

अब, दिए हुए अंतर समीकरण में y_t, y_{t+1} तथा y_{t+2} का मान रखने पर हम प्राप्त करते हैं

$$c.(t+2).5^{t+2} - 7.\ c.(t+1).5^{t+1} + 10.\ c.t.5^t = 3\times 5^t$$

दोनों पक्षों को 5^t से विभाजित करने पर, हम पाते हैं कि

$$25.c.(t+2) - 35.c.(t+1) + 10.\ c.t = 3$$

$$\Rightarrow \qquad (25c - 35c + 10c).t + 50c - 35c = 3$$

$$\Rightarrow \qquad 15c = 3 \Rightarrow c = \frac{1}{5}$$

$\therefore y_p = \frac{1}{5} t\ 5^t$ अपेक्षित विशिष्ट समाकलन (P.I) है।

इसलिए, अंतर समीकरण $y_{t+2} - 7\ y_{t+1} + 10\ y_t = 3\times 5^t$ का पूर्ण हल है :

$$y_t = C.F. + P.I$$

$$= A_1 2^t + A_2 5^t + \frac{1}{5}\ t\ 5^t$$

स्थिति 4 : जब $\emptyset(t) = (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n)\, a^t$ हो, जहाँ $a, a_0, \ldots a_n$ अचर हैं। इस स्थिति में $\emptyset(t)$ स्थिति 2 तथा स्थिति 3 के फलनों का गुणनफल है। इसलिए हम y_p के लिए परीक्षण फलन भी स्थिति 2 और स्थिति 3 में चुने गए फलनों का गुणनफल लेते हैं।

अतः, यदि $\emptyset(t) = (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n)\, a^t$ है तो हम $y_t = (p_\circ + p_1 t + \ldots . p_n t^n) a^t$ को परीक्षण फलन के रूप में चुनते हैं, यदि a संबद्ध रैखिक समघाती अंतर समीकरण के विशिष्ट समीकरण का मूल नहीं है और $y_t = t^m (p_\circ + p_1 t + \ldots . p_n t^n) a^t$ को चुनते हैं यदि a इस विशिष्ट समीकरण का एक मूल है जिसकी पुनरावृत्ति m बार होती है। उदाहरण के लिए, यदि अंतर समीकरण

$$y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 3t^2 7^t$$

है तो हम $y_t = (p_0 + p_1 t + p_2 t^2)\, 7^t$ को विशिष्ट समाकलन के परीक्षण फलन के रूप में लेंगे क्योंकि यहाँ $\emptyset(t) = 3t^2 7^t$, है, जो कि एक द्विघात बहुपद तथा 7^t का गुणनफल है और संबद्ध रैखिक समघाती अंतर समीकरण के विशिष्ट समीकरण का मूल नहीं है।

परंतु यदि हमें अंतर समीकरण $y_{t+2} - 14y_{t+1} + 49y_t = 3t^2 7^t$ दिया गया हो

तो हम परीक्षण फलन के रूप में $y_t = t^2 (p_0 + p_1 t + p_2 t^2) 7^t$

को लेंगे क्योंकि यहाँ विशिष्ट समीकरण $b^2 - 14b + 49 = 0$ है, और 7 इसका एक मूल है। क्योंकि इस मूल 7 की पुनरावृत्ति दो बार होती है, इसलिए गुणक t^2 को इस फलन में सम्मिलित करना आवश्यक था। ऊपर दिए परीक्षण फलनों में पाए जाने वाले अचरों $p_0, p_1, \ldots, p_n$ इत्यादि का मान संबंधित अंतर समीकरण में परीक्षण फलन का मान रखकर ज्ञात कर सकते हैं। यदि परीक्षण फलन में m तथा n के मान अधिक हो तो इन अचरों का परिकलन कठिन हो जाता है। स्थिति 4 में दिए अंतर समीकरणों में परिकलन पहले ही कठिन होता है। परंतु m और n के बड़े मान वाले प्रश्न कम ही पूछे जाते हैं। हमारा पाठकों से अनुरोध है कि इस इकाई के अंत में दिए गए प्रश्नों को अवश्य हल करें जिससे उन्हें इस स्तर के प्रश्नों को हल करने का अभ्यास हो जाए। यहाँ हमने घात 2 वाले अंतर समीकरणों को हल करने की जिन विधियों की चर्चा की है, वे प्रकृति से बहुत व्यापक हैं और इन्हें किसी भी घात वाले रैखिक अंतर समीकरणों को हल किया जा सकता है। विशेष रूप से, घात 1 वाले रैखीय अंतर समीकरणों को इन विधियों से हल किया जा सकता है। कुछ उदाहरणों द्वारा हम इसे स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 8 अंतर समीकरण $y_{t+1} - 4y_t = 3$ को हल कीजिए।

हल यहाँ दिए हुए अंतर समीकरण से संबद्ध समघाती अंतर समीकरण है।

$$y_{t+1} - 4y_t = 0$$

अतः, विशिष्ट समीकरण $b - 4 = 0$ का केवल एक ही मूल $b = 4$ होगा।

∴ अभीष्ट पूरक फलन (C.F) $y_c = A(4)^t$ है।

विशिष्ट समाकलन (P.I.) ज्ञात करने के लिए हम $y_t = k$ को परीक्षण फलन के रूप में लेते हैं जैसा कि स्थिति 1 में बताया गया है क्योंकि $\emptyset(t) = 1$ है। जहाँ, k एक अचर है जिसका निर्धारण किया जाना है।

अब $y_t = k \Rightarrow y_{t+1} = k$ [क्योंकि y_t एक अचर फलन है]

$k - 4k = 3 \Rightarrow k = -1$

$\therefore$ अभीष्ट विशिष्ट समाकलन $(P.I)$ $y_p = -1$ है।

अतः, दिए हुए अंतर समीकरण $y_{t+1} - 4y_t = 3$ का पूर्ण हल

$y_t = C.F + P.I \Rightarrow y_t = A(4)^t - 1$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 9 $y_{t+1} - 2y_t = 12t$ को हल कीजिए

यहाँ $\emptyset(t) = 12t$ है जो कि घात 1 का एक बहुपद है।

$\therefore$ हम परीक्षण फलन के रूप में $y_t = p_0 + p_1 t$ लेंगे।

अतः, $y_{t+1} = p_0 + p_1(t+1)$ होगा।

y_t और y_{t+1} के इन मानों को अंतर समीकरण $y_{t+1} - 4y_t = 3$ में रखने पर हम प्राप्त करते हैं कि

$$[p_0 + p_1(t+1) - 2(p_0 + p_1 t)] = 12\,t$$

$$\Rightarrow (-p_0 + p_1) - p_1 t = 12t$$

दोनों पक्षों के गुणांकों की तुलना करने पर :

$$-p_1 = 12 \Rightarrow p_1 = -12$$

$$\Rightarrow p_0 = p_1 = -12$$

$\therefore$ हमें $y_p = -12 - 12t$ विशिष्ट समाकलन (P.I.) के रूप में मिलता है।

स्पष्ट रूप में, C.F. $= A.2^t$ है।

$\therefore$ दिए हुए अंतर समीकरण का पूर्ण हल

$$y_t = C.F. + P.I.$$
$$= \text{A}.2^t - 12(1+t)$$

होगा।

उदाहरण 10 $y_{t+1} + 5y_t = 6^t$ को हल कीजिए।

हल इस प्रश्न में दिए हुए अंतर समीकरण से संबद्ध समघाती अंतर समीकरण का एक मात्र मूल -5 है और $\emptyset(t) = 6^t$ स्थिति 3 में बताए गए फलन के प्रकार का है। अतः, हम $y_t = c.6^t$ को परीक्षण फलन के रूप में लेते हैं क्योंकि 6, संबद्ध विशिष्ट फलन का मूल नहीं है। इससे हमें $y_{t+1} = c.6^{t+1}$ प्राप्त होता है। y_t और y_{t+1} के इन मानों अंतर समीकरण $y_{t+1} - 4y_t = 3$ में रखने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$c.6^{t+1} + 5.\, c.6^t = 6^t$$

दोनों पक्षों को 6^t से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$6c + 5c = 1$$

$$\Rightarrow \text{c} = \frac{1}{11}$$

$\therefore$ विशिष्ट समाकलन $(P.I)$, $y_p = \frac{1}{11}6^t$ है।

साथ ही, $C.F., y_c = A(-5)^t$ है।

$\therefore$ पूर्ण हल $y_t = C.F. + P.I = A(-5)^t + \frac{1}{11}6^t$ है।

उदाहरण 11 $y_{t+1} - 3y_t = 4.(3)^t$ को हल कीजिए।

हल : हम देख सकते हैं कि इस स्थिति में $(C.F) = A.(3)^t$ होगा क्योंकि 3 अभिलक्षिणक समीकरण का एकमात्र मूल है। हमें $\phi(t) = 4.3^t$, दिया है, अतः, हम $y_t = c.t.3^t$ को परीक्षण फलन के रूप में लेते हैं, क्योंकि 3^t में उपस्थित 3, अभिलक्षिणक समीकरण का एक अनावर्ती मूल है।

$$y_t = c.t.3^t \qquad \Rightarrow \qquad y_{t+1} = c.(t+1)3^{t+1}$$

अब y_t और y_{t+1} के मानों को दिए हुए अंतर समीकरण $y_{t+1} - 3y_t = 4.(3)^t$ में रखने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$c.(t+1)3^{t+1} - 3(c.t.3^t) = 4(3)^t$$

दोनों पक्षों को 3^t से भाग करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$3c\,(t+1) - 3ct = 4$$
$$\Rightarrow 3c = 4$$
$$\Rightarrow 3c = 4$$
$$\Rightarrow c = 4/3$$

$\therefore$ P.I. $= \frac{4}{3}\,t.(3)^t$ है।

$\therefore$ व्यापक हल $y_t = A.(3)^t + \frac{4}{3}\,t.(3)^t$ है

उदाहरण 12 $y_{t+1} + 7y_t = 2t5^t$ को हल कीजिए।

हल : यहाँ $C.F. = A(-7)^t$ होगा और हम $P.I.$ ज्ञात करने के लिए परीक्षण फलन के रूप में $y_t = (p_0 + p_1 t)5^t$ का चयन करते हैं क्योंकि $\phi(t)$ घात 1 के एक बहुपद तथा 5^t का गुणनफल है और 5, यहाँ प्राप्त संबद्ध विशिष्ट फलन का मूल नहीं है।

अब, y_t के आधार पर निर्धारित कर सकते हैं कि y_{t+1} : $y_{t+1} = [p_0 + p_1(t+1)]5^{t+1}$ होगा।

अब y_t और y_{t+1} के मानों को दिए हुए अंतर समीकरण $y_{t+1} + 7y_t = 2t5^t$ में रखने पर हम प्राप्त करते हैं : $[p_0 + p_1(t+1)]5^{t+1} + 7(p_0 + p_1 t)5^t = 2t5^t$

दोनों पक्षों को 5^t से भाग देने पर हम प्राप्त करते हैं

$$5\,p_0 + 5\,p_1 t + 5\,p_1 + 7\,p_0 + 7\,p_1 t = 2t$$

$$12\,p_0 + 5\,p_1 + 12\,p_1 t = 2t$$

समान पदों के गुणकों की तुलना करने पर हम पाते हैं

$$12\,p_0 + 5\,p_1 = 0 \quad \text{तथा} \quad 12\,p_1 = 2$$

$$\Rightarrow p_1 = \frac{1}{6} \quad \text{तथा} \quad p_0 = -\frac{5}{72}$$

∴ हमें $P.I.\ y_p = (-\frac{5}{72} + \frac{1}{6}t)5^t$ प्राप्त होता है।

अतः, व्यापक हर $y_t = A\,(-7)^t + (-\frac{5}{72} + \frac{1}{6}t)5^t$ है।

बोध प्रश्न 2

1) आप यह कैसे पहचानेंगे कि कोई दिया हुआ अंतर समीकरण घात 2 का है?

.....

.....

.....

.....

.....

2) नीचे दिए एकघाती अंतर समीकरणों को हल कीजिए :

i) $y_{t+1} + 2y_t = 5$

ii) $y_{t+1} + 7y_t = 1 + t + t^2$

iii) $y_{t+1} + y_t = 7t$

iv) $y_{t+1} - 4y_t = 5(4)^t$

.....

.....

.....

.....

3) नीचे दिए द्विघाती अंतर समीकरणों को हल कीजिए :

i) $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 0$

ii) $y_{t+2} + 4y_{t+1} + 4y_t = 0$

iii) $y_{t+2} - 11\,y_{t+1} + 28\,y_t = 6$

iv) $y_{t+2} - 3y_{t+1} - 40y_t = 1 + t$

v) $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = t + t^2$

.....

.....

.....

15.5 अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग (Economic Applications)

अंतर समीकरणों के अर्थशास्त्र में व्यापक अनुप्रयोग हैं। गत्यात्मक विश्लेषण में, जब समय चर t केवल असतत मान लेता है और हम एक समय-पथ ज्ञात करना चाहते हैं जबकि t के सापेक्ष एक चर y में परिवर्तन का प्रतिरूप ज्ञात है, तो अंतर समीकरण का उपयोग अत्याधिक सुविधाजनक होता है। इस खंड में हम अर्थशास्त्र में कुछ ऐसी स्थितियों पर चर्चा करेंगे जिनमें किसी दी हुई समस्या को एक अंतर समीकरण के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है तथा इस अंतर समीकरण का हल हमें विचाराधीन समस्या का हल प्रदान करता है।

15.5.1 कॉबवेब प्रतिमान (The Cobweb Model)

आर्थिक विश्लेषण में एक ऐसी स्थिति पर विचार कीजिए जिसमें किसी वस्तु के आपूर्ति फलन तथा माँग फलन क्रमशः $Q_{st} = S(p_t) = -c + dp_{t-1}$ तथा $Q_{dt} = D(p_t) = a - bp_t$ हैं। यहाँ Q_{dt} समय t पर मांग की मात्रा है तथा Q_{st} समय t पर आपूर्ति की मात्रा है। p_t समय t पर वस्तु की कीमत को व्यक्त करता है। अचर a, b, c तथा d सभी धनात्मक हैं, b, समय t पर मांग की संवेदनशीलता को तथा d, समय $t - 1$ पर आपूर्ति की संवेदनशीलता को निरूपित करता है। आपूर्ति फलन समीकरण में, उत्पादक द्वारा आपूर्ति की जाने वाली मात्रा को समय अवधि $t-1$ की कीमत के पदों में व्यक्त किया गया है। अर्थशास्त्र में ऐसी स्थितियाँ उत्पन्न होती रहती हैं। उदाहरण के लिए, कोई उत्पादक भविष्य में अपने द्वारा किए जाने वाले उत्पादन का निर्णय वस्तु की वर्तमान कीमत के आधार पर कर सकता है (अर्थात्, Q_{t+1}, p_tपर आधारित हो सकती है), या वर्तमान उत्पादन का निर्णय वस्तु की पिछली कीमत के आधार पर कर सकता है (अर्थात्, Q_t , p_{t-1} पर आधारित हो सकती है)।

मान लीजिए कि प्रत्येक समय अवधि में, कीमत का निर्धारण सदैव एक ऐसे स्तर पर होता है जहाँ वस्तु की माँग और वस्तु की आपूर्ति बराबर हो जाएं। अर्थात्,

$$Q_{st} = Q_{dt} \qquad \ldots\ldots (1)$$

ऊपर लिए गए समीकरणों तथा मान्यताओं से हमें एक अकेली वस्तु का बाज़ार प्रतिमान प्राप्त होता है। Q_{st} और Q_{dt} का मान समीकरण (1) में रखने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$-c + dp_{t-1} = a - bp_t$$

$$\Rightarrow \quad bp_t + dp_{t-1} = a + c$$

इस समीकरण में t के स्थान $t+1$ पर रखने पर, हम पाते हैं कि

$$\Rightarrow \quad bp_{t+1} + dp_t = a + c$$

$$\Rightarrow \quad p_{t+1} + \frac{d}{b} p_t = \frac{a+c}{b} \qquad \ldots(\text{xv})$$

ध्यान दें कि समीकरण (xv) वास्तव में, एक घात वाला रैखिक असमघाती अंतर समीकरण ही है। अतः, हमने देखा कि किस प्रकार अर्थशास्त्र में उत्पन्न होने वाली एक स्थिति को एक अंतर समीकरण में परिवर्तित किया जा सकता है।

आइए, अब हम समीकरण (xv) को हल करें। इससे संगत समघाती अंतर समीकरण

$$p_{t+1} + \frac{d}{b}p_t = 0$$

है तथा अभिलक्षिणक समीकरण

$$x + \frac{d}{b} = 0$$

है जो हमें $p_{t=1}$ तथा p_{t+1} को x रखने पर प्राप्त होता है।

अभिलक्षिणक समीकरण का एकमात्र मूल $-\frac{d}{b}$ है।

$$\therefore C.F. = A(-\frac{d}{b})^t$$

जहाँ A एक अचर है। विशिष्ट समाकलन, $P.I.$, ज्ञात करने के लिए हम देखते है कि समीकरण (xv) में $\phi(t) = \frac{a+c}{b}$ है, जो कि एक अचर फलन है। अतः, परीक्षण फलन के तौर पर हम $p_t = k$ लेते हैं जिससे हमें $p_{t+1} = k$ प्राप्त होता है। p_t और p_{t+1} के मान (xv) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$k + \frac{d}{b}k = \frac{a+c}{b}$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{a+c}{b+d}$$

अतः, अंतर समीकरण (xv) का व्यापक हल है :

$$p_t = A\,(-\frac{d}{b})^t + \frac{a+c}{b+d} \qquad \ldots(xvi)$$

यदि हमें कोई प्रारंभिक प्रतिबंध दिया हो, जैसे कि $t = 0$ पर मूल्य p_0 है, तो हम अचर A का मान ज्ञात कर सकते हैं। व्यापक हल के समीकरण $t = 0$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$p_0 = A + \frac{a+c}{b+d} \qquad \Rightarrow A = p_0 - \frac{a+c}{b+d}$$

अब, समीकरण (xvi) को हम इस रूप में भी लिख सकते हैं :

$$p_t = (p_0 - \frac{a+c}{b+d})\,(-\frac{d}{b})^t + \frac{a+c}{b+d} \qquad \ldots(xvii)$$

समीकरण (xvii), जो कि अंतर समीकरण (xv) का एक हल है, p_t के लिए समय पथ को निरूपित करता है। अर्थात् t के किसी भी मान के लिए हम उसके संगत संतुलन कीमत p_t प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार हमें एक प्रदोलकीय समय पथ (नियमित आगे और पीछे गति वाला पथ) प्राप्त होता है और इस प्रतिमान को कॉबवेब प्रतिमान कहते हैं। इस प्रतिमान में तीन प्रकार के प्रदोलन प्रतिरूप हैं। यदि $d > b$ हो, तो प्रतिमान **विस्फोटक** कहलाता है, यदि $d = b$ हो तो प्रतिमान **समरूप** कहलाता है और यदि $d < b$ हो तो प्रतिमान **अवमंदित** कहलाता है। इस प्रतिमान को कॉबवेब प्रतिमान कहते हैं। जब हम कीमत और मात्रा को अनुगामी अंतरालों में आरेखित करें तो माँग और पूर्ति वक्रों के आस-पास एक मकड़ी का जाल बन जाता है।

कॉबवेब प्रतिमान, अर्थशास्त्र में एक ऐसी स्थिति का उदाहरण था जो एक घात वाले अंतर समीकरण को जन्म देता है। अब हम एक ऐसी स्थिति पर विचार करते हैं जिसमें हमें एक घात-दो वाला अंतर समीकरण प्राप्त होता है।

15.5.2 सैम्युलसन गुणक त्वरण परस्पर प्रभाव प्रतिमान (Samuelson Multiplier-Accelerator Interaction Model)

इस प्रतिमान में हम मानकर चलते हैं कि राष्ट्रीय आय y_t के तीन अवयव हैं :

i) उपभोग (Consumption - C_t)

ii) निवेश (Investment - I_t)

iii) सरकारी व्यय (Government Expenditure - G_t)

किसी समय अवधि t में किए जाने वाले उपभोग (C_t) को पिछले अवधि में हुई आय y_{t-1}, के अनुपात में माना जाता है। इसी प्रकार अवधि t में किया जाने वाला निवेश (I_t), समय अवधि $t-1$ में हुए उपभोग के सापेक्ष समय अवधि में हुए उपभोग में वृद्धि के अनुपात में माना जाता है। अर्थात् I_t को $C_t - C_{t-1}$ के अनुपात में माना जाता है। इन मान्यताओं से हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं :

आय फलन $\quad y_t = C_t + I_t + G_0$

उपभोग फलन $\quad C_t = \gamma\, y_{t-1} \quad (0 < \gamma < 1)$

निवेश फलन $\quad I_t = \alpha\,(C_t - C_{t-1}) \quad (\alpha > 0)$

सरकारी व्यय को एक अचर G_0 के बराबर माना जाता है। अचर γ सीमांत उपभोग की प्रवृत्ति को निरूपित करता है तथा α त्वरण गुणक को निरूपित करता है।

उपभोग फलन में से C_t का मान लेकर निवेश फलन में रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$I_t = \alpha\gamma(y_{t-1} - y_{t-2})$$

अब ऊपर प्राप्त I_t के मान को तथा उपभोग फलन के मान को, आय फलन (y_t) रखने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$y_t = \gamma\, y_{t-1} + \alpha\gamma(y_{t-1} - y_{t-2}) + G_0$$

$$\Rightarrow \quad y_t - \gamma\, y_{t-1} - \alpha\gamma(y_{t-1} - y_{t-2}) = G_0$$

$$\Rightarrow \quad y_t - \gamma\,(1+\alpha)\, y_{t-1} + \alpha\gamma\, y_{t-2} = G_0$$

इस समीकरण में t के स्थान पर $t+2$ रखने पर, इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है –

$$\Rightarrow \quad y_{t+2} - \gamma\,(1+\alpha)\, y_{t+1} + \alpha\gamma\, y_t = G_0$$

इस प्रकार हमें एक घात 2 वाला असमघाती अंतर समीकरण प्राप्त होता है जिसे सरलतापूर्वक हल किया जा सकता है।

क्योंकि $\phi(t) = G_0$ एक अचर है, विशिष्ट समाकलन $(P.I)$ ज्ञात करना सरल है। पूरक फलन $(C.F)$ ज्ञात करने में कठिनाई आ सकती है क्योंकि इस स्थिति में संबद्ध समघाती अंतर समीकरण का अभिलक्षिणक समीकरण

$$x^2 - \gamma\,(1+\alpha)\,x + \alpha\gamma = 0$$

है जो $y_t = 1,\ y_{t+1} = x$ का $y_{t+2} = x^2$ रखने पर प्राप्त होता है। इस समीकरण के मूल

$$x = \frac{\gamma\,(1+\alpha) \pm \sqrt{\gamma^2(1+\alpha)^2 - 4\alpha\gamma}}{2}$$

हैं। क्योंकि किसी द्विघात समीकरण के मूल $ax^2 + bx + c = 0$ से प्राप्त होते हैं [अर्थात् $\because x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$]।

इन मूलों की प्रकृति अचरों α और γ पर निर्भर करती है। अतः, कई प्रकार की स्थितियाँ उत्पन्न हो सकती हैं। हम इसके जटिल विवरण में नहीं जाना चाहते क्योंकि हम अपने इस दावे को पहले ही स्थापित कर चुके हैं कि आर्थिक विश्लेषण में ऐसी स्थितियाँ आती हैं जिन्हें अंतर समीकरणों के माध्यम से सुलझाया जा सकता है।

बोध प्रश्न 3

1) नीचे दिए कॉबवेब प्रतिमान की विशेष स्थितियों में से प्रत्येक के लिए अंतर समीकरण ज्ञात करें तथा उन्हें हल करें।

i) $Q_{dt} = 18 - 3P_t,\ \mathrm{Q_{st}} = -3 + 4P_{t-1}$

ii) $Q_{dt} = 5 - 2P_t,\ \ Q_{st} = -2 + 5P_{t-1}$

iii) $Q_{dt} = 19 - 7P_t\ \ \mathrm{Q_{st}} = 6P_{t-1} - 4$

.....

.....

.....

जहाँ Q_{dt} मांग की मात्रा को तथा Q_{st} आपूर्ति की मात्रा और P कीमत को व्यक्त करते हैं।

2) नीचे खंड 15.5.2 में आय, उपभोग तथा निवेश फलन समीकरणों से प्राप्त किए गए सैम्युलसन गुणक त्वरण परस्पर प्रभाव प्रतिमान की कुछ विशेष स्थितियाँ दी गई हैं। इनमें से प्रत्येक के लिए अंतर समीकरण ज्ञात कीजिए तथा उन्हें हल कीजिए।

i) $\alpha = \frac{2}{3}$ तथा $\gamma = \frac{2}{3}$ लें।

ii) $\alpha = \frac{2}{3}$ तथा $\gamma = \frac{24}{25}$ लें।

.....

.....

.....

15.6 सार-संक्षेप

यह इकाई असतत समय में होने वाली गतिशील आर्थिक प्रक्रियाओं से संबंधित थी। अगली इकाई में हम इस विषय पर और चर्चा करते हुए हम अरैखिक प्रक्रियाओं का अध्ययन करेंगे। इस इकाई का प्रारंभ हमने सतत तथा असतत प्रक्रियाओं के बीच अंतर की व्याख्या से किया। प्रथम अग्र अंतर का परिचय देने के पश्चात् हमने अंतर समीकरणों की प्रकृति की व्याख्या की तथा समघाती एवं असमघाती अंतर समीकरणों के बारे में जानकारी प्राप्त की। तत्पश्चात् हमने घात एक तथा द्विघात वाले अंतर समीकरणों के बारे में चर्चा की। हमने इस चर्चा को केवल रैखिक समीकरणों तक सीमित रखा तथा इन अंतर समीकरणों को हल करने की विधियों का विस्तृत अध्ययन किया। घात एक वाले अंतर समीकरणों का हल करने की पुनरावृत्तीय विधि तथा व्यापक विधि की विस्तार से चर्चा की गई। इसी प्रकार घात दो वाले अंतर समीकरणों को हल करने की विधियों की चर्चा की गई तथा इनसे संबंधित कई उदाहरण लिए गए। अंत में, आर्थिक प्रतिरूपण में अंतर समीकरणों के प्रयोग पर चर्चा की गई तथा कॉबवेब प्रतिमान तथा सैम्युलसन गुणक त्वरण परस्पर प्रभाव प्रतिमान का अध्ययन किया गया।

15.7 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) यदि अन्तर समीकरण के स्थिरांक पद अर्थात् जिस पद में y चर नहीं हो– का मान शून्य हो तो वह समीकरण **सम-घात** कहलाता है, अन्यथा **विषम-घात**।

2) i) $y_t = 6^t y_0$

ii) $y_t = y_0$

iii) $y_t = 10t + y_0$

iv) $y_t = 3^t y_0$

बोध प्रश्न 2

1) जिस अन्तर समीकरण में y_t के y_{t+2} से अधिक मान के पद नहीं हों उसे द्वितीय कोटि अन्तर समीकरण कहा जाता है।

2)

i) $y_t = A(3)^t + \frac{5}{3}$

ii) $y_t = A(-7)^t + \left[\frac{25}{256} + \frac{3}{32}t + \frac{1}{8}t^2\right]$

iii) $y_t = A(-1)^t - \frac{7}{4} + \frac{7}{2}t$

iv) $y_t = A(4)^t + \frac{5}{4}t(4)^t$

3) i) $y_t = A_1(2)^t + A_2(3)^t$

ii) $y_t = (A_1 + tA_2)(-2)^t$

ii) $y_t = A_1(4)^t + A_2(7)^t + \frac{1}{3}$

iv) $y_t = A_1(8)^t + A_2(-5)^t + \left[-\frac{41}{1764} - \frac{1}{42}t\right]$

v) $y_t = (A_1 + tA_2)(3)^t + \left[\frac{7}{8} + \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}t^2\right]$

बोध प्रश्न 3

1)

i) $P_t = A(-\frac{4}{3})^t + 3$

ii) $P_t = A(-\frac{5}{2})^t + 1$

iii) $P_t = A(-\frac{6}{7})^t + \frac{23}{13}$

2) i) $y_t = A_1\left(\frac{14}{15}\right)^t + A_2\left(\frac{7}{10}\right)^t + 50\ G_0$

ii) $y_t = A\left(\frac{4}{5}\right)^t + 25\ G_0$

ignou
THE PEOPLE'S
UNIVERSITY

इकाई 16 अरैखिक अंतर समीकरण*

संरचना

16.0 उद्देश्य

16.1 विषय-प्रवेश

16.2 प्रावस्था आरेख तथा गुणात्मक विश्लेषण [Phase Diagram and Qualitative Analysis]

16.3 अरैखिक अंतर समीकरणों का रैखीयकरण [Linearising Non-Linear Difference Equations]

16.4 अरैखिक अंतर समीकरणों के अनुप्रयोग [Applications of Non-Linear Difference Equations]

16.4.1 सोलो प्रतिमान [Solow Growth Model]

16.4.2 आवर्तन तथा अनावर्तन (अव्यवस्था) [Cycles and Chaos]

16.5 सार-संक्षेप

16.6 बोध-प्रश्नों के उत्तर/संकेत

16.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप, निम्नलिखित से भली–भांति अवगत हो जाएंगे :

- रैखिक एवं अरैखिक अंतर समीकरणों के बीच अंतर से;
- प्रावस्था आरेख की संकल्पना से तथा अरैखिक अंतर समीकरणों को समझने में इसके महत्वपूर्ण योगदान से;
- अरैखिक अंतर समीकरणों के गुणात्मक विश्लेषण की विधि से;
- अरैखिक अंतर समीकरणों को रैखिक बनाने की विधि से; तथा
- अरैखिक अंतर समीकरणों पर आधारित संवृद्धि प्रतिमान और आवर्तन तथा अनावर्तन (अव्यवस्था) सिद्धांत में उनके अनुप्रयोगों से।

16.1 विषय-प्रवेश

पिछली इकाई में हमने रैखिक अंतर समीकरणों के बारे में पढ़ा। वास्तव में, अनेक अर्थशास्त्रीय प्रतिरूपों में अरैखिक गत्यात्मक संबंध उत्पन्न होते हैं। अरैखिकता के आ जाने से अंतर समीकरणों की सार वस्तु नहीं बदलती। आईए हम एक साधारण अर्थशास्त्रीय तंत्र पर विचार करें। मान लीजिए कि अर्थशास्त्रीय तंत्र, जिस की हम चर्चा कर रहे हैं, एक ही चर $x \in X$ से वर्णित है, जहाँ $X \subseteq \mathbb{R}$ वास्तविक संख्या रेखा पर एक अंतराल है जो कि रिक्त नहीं है। आपने समुच्चयों पर केंद्रित इकाई में वास्तविक संख्या रेखा तथा उपसमुच्चयों के बारे में पढ़ा है। चर x को तंत्र प्रांत में तंत्र चर तथा X को तंत्र प्रांत कहा जाता है। तंत्र प्रांत में तंत्र चर के सभी संभव मान सम्मिलित होते हैं।

हमारे संदर्भ में, हम अर्थशास्त्रीय तंत्र को एक गत्यात्मक तंत्र मानते हैं, अर्थात् x का मान समय अनुसार परिवर्तित होता है। हम यह भी मान कर चलते हैं कि समय असतत

*श्री सौगतो सेन एवं सुश्री चैताली अरोड़ा

अंतरालों $t \in \{0,1,2,3..\}$ इत्यादि में मापा जा रहा है। चर x एक अंतराल में केवल एक बार ही बदलता है। समुच्चय Z^+ (अर्थात् धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय) सभी समय अंतरालों का समुच्चय है और समय प्रांत या समय क्षितिज कहलाता है। समय को चर x पर एक पादांक के रूप में लिखा जाता है। अतः, x_t समय अंतराल t में x के मान को व्यक्त करता है। सभी अंतर समीकरण समय के अनुसार चर के विकास को वर्णित करते हैं। तंत्र का गत्यात्मक विकास एक फलन f द्वारा परिभाषित जाता है, जो यह दर्शाता है कि किस प्रकार x_t, x के पूर्व मानों पर निर्भर करता है। हम इसे इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

यहाँ फलन f को गति का नियम अथवा तंत्र गतिकी कहते हैं। पिछली इकाई में हमने उन अंतर समीकरणों पर विचार किया जो कि एक रैखिक समीकरण द्वारा परिभाषित थे जैसे कि

$$x_{t+1} = a + bx_t$$

अरैखिक रूप में रैखिक अंतर समीकरण एक विशेष उद्धरण के रूप में सम्मिलित होते हैं परंतु अरैखिक अंतर समीकरणों का एक फायदा यह है कि इनमें विविध प्रकार के समय पथों की एक व्यापक श्रेणी को समाहित किया जा सकता है।

यद्यपि ऊपर दिए गए अरैखिक अंतर समीकरण को $x_{t+1} = f(x_t, t)$ से भी व्यक्त किया जा सकता है, यहाँ t एक स्वतंत्र चर की तरह उपस्थित रहता है, तथापि हम अंतर समीकरणों के केवल स्वायत्त रूप को ही लेंगे जिनमें समय, t, एक स्वतंत्र चर के रूप में उपस्थित नहीं होगा। अतः, हम यहाँ अपनी चर्चा को केवल निम्न प्रकार के अंतर समीकरणों के अध्ययन तक सीमित रखेंगे :

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

ध्यान दें x_{t+1} का मान केवल x के एक दम पिछले अंतराल के मान पर निर्भर करता है अर्थात् यह केवल x_t के मान पर निर्भर है, x_{t-1} तथा उससे पिछले मानों पर नहीं। इस प्रकार के अंतर समीकरणों को प्रथम–कोटि अंतर समीकरण कहते हैं। इस इकाई में हम केवल प्रथम–कोटि अंतर समीकरणों पर विचार करेंगे।

रैखिक अंतर समीकरणों का व्यापक रूप

$$x_{t+1} = f(x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-k+1}, t)$$

है, जहाँ k एक धनात्मक पूर्णांक है। इस अंतर समीकरण की कोटि कहते हैं। ऊपर दिए हुए समीकरण में t भी एक स्वतंत्र चर के रूप में उपस्थित है, जैसा कि हमने ऊपर भी उल्लेख किया था। यदि t स्वयं एक चर के रूप में उपस्थित न हो तो अंतर समीकरण स्वायत्त कहलाता है।

कोटि एक के स्वायत्त अंतर समीकरण $x_{t+1} = f(x_t)$ का हल एक अनुक्रम $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ होता है जहाँ $x_t \in X$ होता है और समीकरण $x_{t+1} = f(x_t)$ को संतुष्ट करता है। ऐसे अनुक्रम को समीकरण $x_{t+1} = f(x_t)$ की अग्रगति कहते हैं।

आईए हम अपने अंतर समीकरण $x_{t+1} = f(x_t)$ को एक बार पुनः देखें। ध्यान दें कि हम इसमें एक अंतराल की अवस्था बदलकर इसे $x_t = f(x_{t-1})$ के रूप में लिख सकते हैं। यदि एक प्रारंभिक प्रतिबंध '$t = 0$ पर x_0 है' तो हम इसके हल के रूप में निम्नलिखित अनुक्रम ज्ञात कर सकते है।

$$x_1 = f(x_0)$$

$$x_2 = f(x_1) = f\left[f(x_0)\right] = f^2(x_0)$$

$$x_3 = f(x_2) = f\left[f^2(x_0)\right] = f^3(x_0)$$

.

.

.

.

$$x_t = f(x_{t-1}) = f[f^{t-1}(x_0)] = fh\ (x_0)$$

जहाँ f^t, f की t वीं पुनरावृत्ति को व्यक्त करता है f की घात को नहीं। फलन $x(t, x_0) = f^t(x_0)$ को तंत्र $x_t = f(x_{t-1})$ की अग्रगति कहते हैं।

ऊपर दिए हुए समीकरण की गत्यात्मकता का विश्लेषण करने के लिए एक बहुत सरल परंतु प्रभावशाली विधि उपलब्ध है। इस तकनीक का प्रयोग करने के लिए, हमें फलन f का आलेख बनाना होगा और साथ ही $\{x_t, x_{t+1}\}$ के तल में एक 45^0 का कोण बनाती हुई एक रेखा भी।

अगले अनुच्छेद में हम इस प्रकार के आरेखों की सहायता से प्रथम–कोटि अंतर समीकरणों के हल तक पहुँचने कि विधि पर चर्चा करेंगे। इन आरेखों को हम प्रावस्था आरेख कहते हैं। उसके पश्चात् इस इकाई में हम इसे विषय पर चर्चा करेंगे कि किस प्रकार अरैखिक अंतर समीकरणों का विशिष्ट बिंदुओं के प्रतिवेश (neighbourhoods) में रैखिक अंतर समीकरणों से सन्निकटन किया जा सकता है। इसके पश्चात् इस इकाई के अनुच्छेद 16.4 में अरैखिक अंतर समीकरणों के कुछ अनुप्रयोगों की चर्चा की गई है। इस अनुच्छेद में सोलो द्वारा प्रतिपादित संवृद्धि प्रतिमान पर चर्चा की गई है। अंत में इस इकाई में अर्थशास्त्रीय तंत्रों के आवर्ती चक्र एवं अनावर्ती व्यवहार की चर्चा की गई है। अनावर्ती व्यवहार को अव्यवस्था भी कहते हैं।

16.2 प्रावस्था आरेख और गुणात्मक विश्लेषण [Phase Diagram and Qualitative Analysis]

अरैखिक अंतर समीकरणों के प्रावस्था आरेख हमें उनके गुणात्मक 'हल' ज्ञात करने में सहायक सिद्ध होते हैं। प्रावस्था आरेखों को समझने के लिए हम एक अंतर समीकरण $x_{t+1} = f(x_t)$*, जहाँ $t = 0, 1, 2, 3\ldots$[1] पर विचार करते हैं।

एक व्यापक अरैखिक प्रथम कोटि अंतर समीकरण $x_{t-1} = f(x_t, t), t = 0,1,2\ldots..$द्वारा व्यक्त किया जाता है। यहां हम एक ऐसे समीकरण पर विचार कर रहे हैं जो स्पष्टतः समय पर निर्भर नहीं करती, अर्थात् $x_{t+1} = f(x_t)$ जहां $t = 0,1,2,3\ldots..$। इसे अरैखिक प्रथम कोटि स्वायत्त अंतर समीकरण कहते हैं।

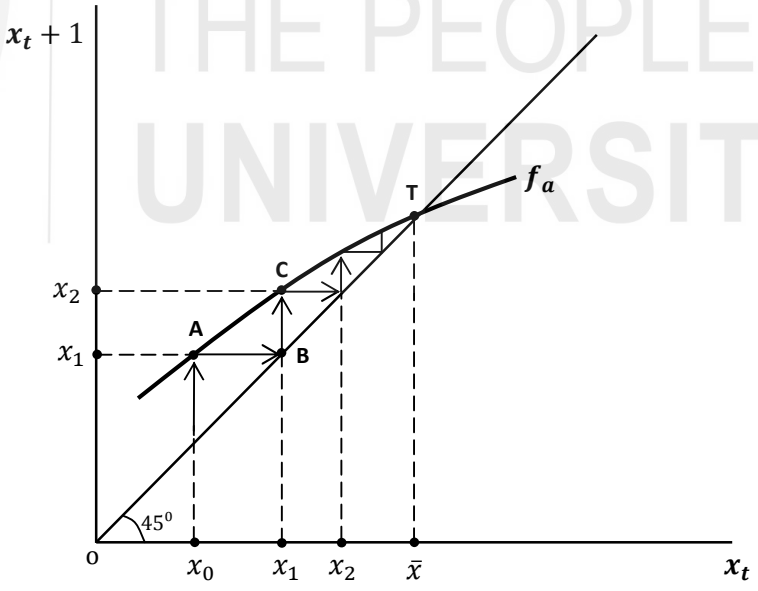
स्थिति 1 : $0 < f'(x) < 1$ और $f''(x) < 0$ है

हम पहले इस अरैखिक अंतर समीकरण का प्रावस्था आरेख यह मानते हुए ज्ञात करते हैं कि फलन $f(x)$ एक वर्धमान फलन है अर्थात् $f'(x) > 0$ है तथा जैसे–जैसे x बढ़ता है फलन समतल/सपाट होने लगता है अर्थात् $f''(x) < 0$ है।

यदि हम इस वक्र का आरेख बनाएं जिसमें x_{t+1} ऊर्ध्व तथा x_t क्षैतिज अक्ष पर लिया जाए, तो हमें रेखाचित्र 16.1 जैसा एक चित्र प्राप्त होगा। आईए हम इस वक्र को (जिसे प्रावस्था रेखा कहते हैं)

$$x_{t+1} = f_a(x_t) \qquad \ldots(1)$$

से व्यक्त करें। हमने रेखाचित्र 16.1 में हमने 45^0 रेखा भी बनाई है। वक्र f_a का 45^0 रेखा के साथ उभयनिष्ठ होना बिंदु $x_{t+1} = x_t$ पर एक संतुलन बिंदु को चिह्नित करता है। यदि x_0 क्षैतिज अक्ष पर दिया हुआ एक प्रारंभिक मान है, तो समीकरण (1) से हम एक ऊर्ध्व–निर्देशांक मान x_1 जहाँ $x_1 = f_a(x_0)$ है, प्राप्त करते हैं। यही रेखाचित्र 16.1 में प्रावस्था रेखा f_a प्रतिचित्रित करती है। दूसरे दृष्टिकोण से देखें तो, क्षैतिज अक्ष पर स्थित x_0 को यदि हम सीधे प्रावस्था रेखा तक ले जाएं तो, बिंदु A, x_1 का मान दर्शाता है। इसके पश्चात् हम अगला युग्म x_1 और x_2 का लेते हैं जहाँ $x_2 = f_a(x_1)$ है। ध्यान दें कि x_1 को ऊर्ध्वाधर अक्ष से क्षैतिज अक्ष पर पुनः, 45^0 रेखा (जिसकी ढाल 1 है) की सहायता से, आरेखित किया जा सकता है। आने वाले युग्मों के लिए यही विधि बार–बार अपनायी जाती है। यह प्रक्रिया जैसा कि हमने पिछली इकाई में भी पढ़ा है, आवर्ती विधि कहलाती है।

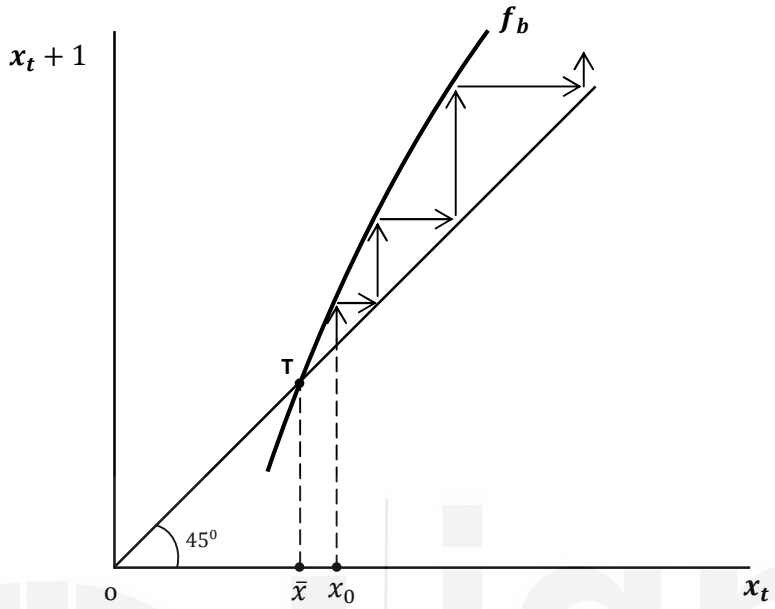


रेखाचित्र 16.1

इसी तरह नीचे दी तीनों स्थितियों में भी, ऊपर वर्णित आरेखीय आवर्ती विधि लगाई जा सकती है :

स्थिति II: $f'(x) > 1$ तथा $f''(x) < 0$ है

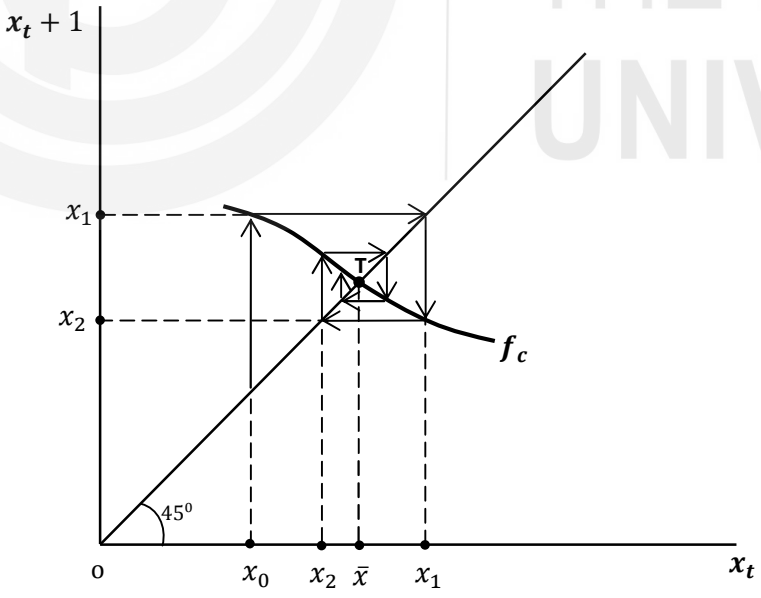
मान लीजिए प्रावस्था रेखा $x_{t+1} = f_b(x_t)$ है।



रेखाचित्र 16.2

स्थिति III: $-1 < f'(x) < 0$

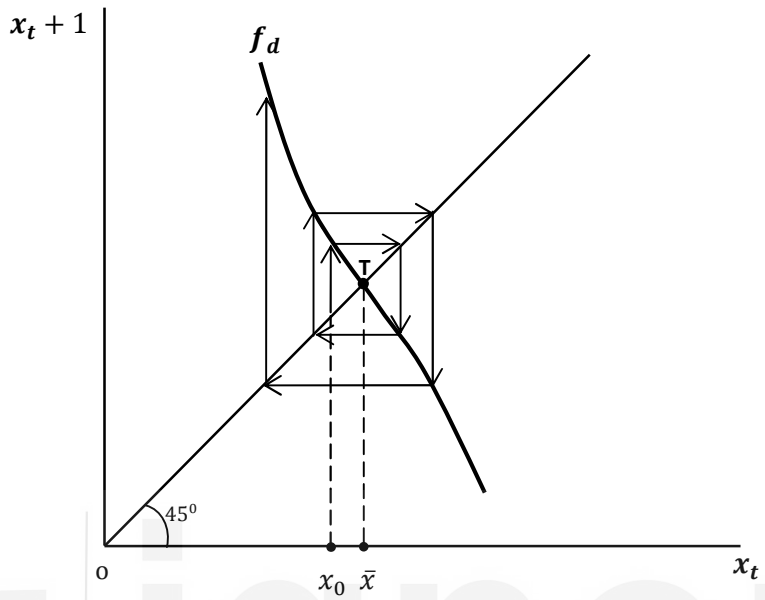
मान लीजिए प्रावस्था रेखा $x_{t+1} = f_c(x_t)$ है।



रेखाचित्र 16.3

स्थिति IV: $f'(x) < -1$

मान लीजिए प्रावस्था रेखा $x_{t+1} = f_d(x_t)$ है।



रेखाचित्र 16.4

ऊपर दी गई चार स्थितियाँ, प्रावस्था रेखा के चार आधारभूत प्रकार दर्शाती हैं। इनमें से प्रत्येक एक भिन्न समय पथ को दर्शाती है। प्रत्येक रेखाचित्र में x का अंतर्कालिक संतुलन मान, जिसे $\bar{x}$ से व्यक्त किया जाता है, रेखाचित्र में दी हुई प्रावस्था रेखा और उस से संबद्ध 45^0 रेखा के उभयनिष्ठता बिंदु से प्राप्त होता। प्रत्येक चित्र में उसे T से दर्शाया गया है। बिंदु T पर $x_{t+1} = x_t$ होता है।

अब हम यह जानना चाहते हैं कि यदि एक प्रारंभिक मान $x_0 \neq \bar{x}$ दिया है, तो क्या प्रावस्था रेखा द्वारा निर्दिष्ट परिवर्तन का प्रतिरूप हमें अविरूद्ध रूप से $\bar{x}$ की ओर ले जाएगा या इस से दूर। यदि यह हमें $\bar{x}$ की ओर ले जाता है तो यह अभिसरण की स्थिति कहलाती है, नही ंतो अपसरण की। ऊपर ली गई स्थिति 1 में प्रावस्था रेखा f_a हमें सुस्थिर पथ से, x_0 से $\bar{x}$ की ओर ले जाती है बिना किसी दोलन के। यदि x_0, $\bar{x}$ की दाईं ओर स्थित हो तो भी, $\bar{x}$ की ओर का पथ स्थिर और बाईं दिशा में रहता है। इसे संतुलन का अभिसरण कहा जाता है। स्थिति II में प्रावस्था रेखा f_b जिसकी ढाल 1 से बड़ी है, एक अपसारी पथ दर्शाती है। इस स्थिति में यदि हम $\bar{x}$ से बड़े प्रारंभिक मान x_0 से प्रारंभ करें तो हम निरंतर संतुलन मान से दूर, x के बड़े और अधिक बड़े मानों की ओर जाते हैं। इसी प्रकार यदि हम प्रारंभिक मान से छोटा लें, तो हम पाते हैं कि $\bar{x}$ के मान विपरीत दिशा में अपसारी गति दर्शाते हैं। स्थिति III और IV में वक्र संतुलन बिंदु से आगे निकल जाता है तथा हमें सुस्थिर दोलनी गति प्राप्त होती है। प्रावस्था रेखा f_c की निरपेक्ष ढाल 1 से कम है। इस स्थिति में x, $\bar{x}$ से जिस सीमा तक आगे निकल गया है, उसी के अंदर रहते हुए, प्रत्येक क्रमिक समय अंतराल में कम होता हुआ $\bar{x}$ की ओर अभिसरित होता है, अर्थात् x_0 से यह x_1 तक जाता है जो कि $\bar{x}$ से अधिक है, इसके पश्चात् यह x_1 से x_2 तक जाता है जो कि $\bar{x}$ से कम होता है। प्रावस्था रेखा f_d की निरपेक्ष ढाल 1 से अधिक है और हमारे समक्ष एक अपसारी समय पथ का विपरीत दृश्य उपस्थित होता है।

ऊपर की गई चर्चा से हम दो मूलभूत नियम प्राप्त होते हैं :

i) एक प्रथम-काटि, स्वायत, अरैखिक अंतर समीकरण का एक स्थिर स्थायी/अपरिवर्ती–दशा संतुलन बिंदु (stable steady-state equilibrium point) $\bar{x}$ होगा, यदि अवकलज (जो और कुछ नहीं, प्रावस्था रेखा की ढाल ही है) का निरपेक्ष मान $f'(\bar{x})$, 1 से कम है, और यह संतुलन बिंदु अस्थिर होगा यदि अवकलज का $\bar{x}$ पर निरपेक्ष मान 1 से अधिक है।

ii) एक प्रथम–कोटि, स्वायत, अरैखिक अंतर समीकरण से हमें x_t में प्रदोलन प्राप्त होता है यदि $f'(x)$, प्रत्येक $x_t > 0$ के लिए ऋणात्मक है जबकि x_t की गति एकदिष्ट होगी यदि $f'(x)$, प्रत्येक $x_t > 0$ के लिए धनात्मक है।

बोध प्रश्न 1

1) एक अरैखिक अंतर समीकरण क्या होता है?

.....

.....

.....

.....

.....

2) एक प्रावस्था आरेख से आप क्या समझते हैं? इसका उपयोग क्या है?

.....

.....

.....

.....

.....

3) एक रैखिक अंतर समीकरण और एक अरैखिक अंतर समीकरण के संतुलन में मूलभूत अंतर क्या है?

.....

.....

.....

.....

.....

16.3 अरैखिक अंतर समीकरणों का रैखीयकरण [Linearising Non-Linear Difference Equations]

किसी अंतर समीकरण के संतुलन बिंदु अर्थात् स्थिर बिंदु ज्ञात करने के पश्चात् हमारे सामने जो मुख्य कार्य रह जाता है वह है उस संतुलन की स्थिरता का पता लगाना। अरैखिक समीकरणों के लिए, हम संतुलन बिंदुओं की जाँच केवल उनके आस-पास के

एक छोटे/लघु प्रतिवेश में कर सकते है। ऐसा करने के लिए, अरैखिक फलन को संतुलन बिंदु पर रैखिक बनाया जाता है और उसके पश्चात् इस रैखिक सन्निकटन की ढाल की जाँच की जाती है। वास्तव में, यह मात्र उसका विस्तार है जो हमने पिछले अनुच्छेद में किया था जब हमने प्रावस्था आरेखों का अध्ययन किया था : हमने संतुलन की स्थिरता का अनुमान लगाने के लिए प्रावस्था आरेख में फलन $f(x)$ की ढाल की सहायता ली थी। हमने संतुलन के क्षेत्र में $f(x)$ की ढाल की जाँच की थी।

हमने पहले भी एक इकाई में यह देखा है कि हम किस प्रकार टेलर श्रेणी प्रसार के प्रयोग से किसी अरैखिक फलन को रैखिक बनाते हैं। अब हम $f(x)$ अर्थात् अपने अरैखिक अंतर फलन को रैखिक बनाने का प्रयास करते हैं। इसके लिए हमें इस फलन का संतुलन बिंदु पर प्रथम-कोटि टेलर श्रेणी प्रसार ज्ञात करना पड़ेगा। यद्यपि एक प्रथम-कोटि टेलर श्रेणी प्रसार से हमें एक अरैखिक फलन का रैखिक सन्निकटन प्राप्त होता है, समस्या यह है कि यह सन्निकटन प्रसार बिंदु के आस-पास एक सीमित परिसर में ही सही मान देता है। साथ ही मूल फलन की वक्रता जितनी अधिक होगी, यह परिसर उतना ही छोटा होगा। निश्चित रूप से यह ज़रूरी नहीं कि हम इस प्रसार को प्रथम-कोटि तक ही सीमित रखें, हम इस प्रकार को जिस कोटि तक चाहें ले जा सकते हैं। यदि हमारे वक्र की वक्रता बहुत अधिक है तो हमें इसका अच्छा सन्निकटन प्राप्त करने के लिए उच्च-कोटि के प्रसार की आवश्यकता पड़ेगी परंतु उच्च–कोटि के प्रसारों में अरैखिक पद/तत्व आ जाते हैं और हमारा लक्ष्य एक रैखिक प्रसार प्राप्त करना है। इसलिए हम प्रथम-कोटि अर्थात् रैखिक प्रसार पर ही रूक जाते हैं।

किसी दिए हुए व्यापक फलन $f(x)$ का प्रथम-कोटि टेलर श्रेणी सन्निकटन ज्ञात करने के लिए, हम सर्वप्रथम x का वह मान निर्धारित करते हैं, जिस पर हमें अपने अरैखिक फलन का रैखिक सन्निकटन ज्ञात करना है। आईए हम x के इस मान को x^* से ज्ञात करें। इसका अर्थ है कि सन्निकटन बिंदु पर $f(x)$ का मान $f(x^*)$ होगा। फलन $f(x)$ का किसी भी बिंदु x^* पर सन्निकटन हम निम्न प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं :

$$f(x) \approx f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx}(x - x^*)$$

ध्यान दें कि इस समीकरण के दाएं पक्ष में उपस्थित अवकलज का मान भी x^* पर ही ज्ञात किया जाएगा। x, x^* के जितना निकट होगा, सन्निकटन का मान उतना ही बेहतर होगा।

अब हम इस सन्निकटन विधि का प्रयोग एक प्रथम–कोटि अंतर समीकरण पर करते हैं। स्मरण रहे कि हम नीचे दी गई प्रथम-कोटि अंतर समीकरण का सन्निकटन ज्ञात करने का प्रयास कर रहे हैं, और x^* या $\bar{x}$ को तन्त्र के एक संतुलन बिन्दु को दर्शाने के लिए प्रयोग कर रहे हैं

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

x^* इस अंतर समीकरण का एक संतुलन बिंदु है। इस संतुलन बिंदु के निकट, फलन का सन्निकटन करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$x_{t+1} = f(x_t) = f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx}(x_t - x^*) \quad \ldots (1)$$

ध्यान दें कि x^* एक संतुलन बिंदु है। अतः हम इस समीकरण को इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$x_{t+1} = x^* + \frac{df(x^*)}{dx}(x_t - x^*) \qquad \ldots(2)$$

आईए हम एक नया चर x^D परिभाषित करें जो कि x के वर्तमान मान से संतुलन मान x^* के विचलन को व्यक्त करता है। अतः, $x^D{}_t = x_t - x^*$ और $x^D{}_{t+1} = x_{t+1} - x^*$ है। इस प्रकार हम समीकरण (2) को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$x^D_{t+1} = \frac{df(x^*)}{dx} x^D_t \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (3) की व्याख्या करते हुए, हमें यह ध्यान रखना चाहिए कि हमने प्रथम अवकलज $\frac{df(x^*)}{dx}$ का मान एक बिंदु x^* (जो यहाँ पर संतुलन बिंदु है) पर ज्ञात किया है, अतः यह एक अचर है। इस तथ्य के प्रकाश में यह स्थिर गुणांक वाला एक समघात समीकरण बन जाता है। अर्थात् हमें एक प्रथम–कोटि समघात अंतर समीकरण प्राप्त होता है। क्योंकि यह एक समघात समीकरण है, इसका संतुलन $x^D = 0$ पर होगा। परंतु x^D मूल चर का संतुलन बिंदु से विचलन है, इसलिए $x^D = 0$ का अर्थ है $x = x^*$। अतः यदि समीकरण 2 स्थिर है जबकि x^D इसके संतुलन बिंदु की ओर अभिसरण करता है, तो x भी अपने संतुलन बिंदु की ओर अभिसरण करेगा।

बोध प्रश्न 2

1) हम अरैखिक अंतर समीकरणों को रैखिक बनाने की आवश्यकता क्यों पड़ती है?

.....

.....

.....

.....

.....

2) एक ऐसी विधि सुझाइए जिससे एक प्रथम-कोटि अरैखिक अंतर समीकरण का सन्निकटन उसके संतुलन बिंदु के समीप एक लघु प्रतिवेश में किया जा सके।

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

16.4 अरैखिक अंतर समीकरणों के अनुप्रयोग [Applications of Non-Linear Difference Equations]

इस अनुच्छेद में हम अरैखिक समीकरणों के कुछ अनुप्रयोगों की चर्चा करेंगे। संभवतः इन समीकरणों के विभिन्न अनुप्रयोगों में सबसे अधिक जाने–पहचाने अनुप्रयोग आर्थिक विकास के कुछ प्रतिमानों में मिलते हैं। यही नहीं अनेक उपभोग प्रतिमान भी अरैखिक समीकरणों से निरूपित होते हैं विशेषकर तब, जब उपयोगिता फलन अत्यंत प्रतिबंधात्मक न हो। परंतु हम यहाँ उपभोग फलन की चर्चा नहीं करेंगे, अपितु अन्य अरैखिक गत्यात्मक प्रक्रमों की चर्चा करेंगे। विशेष रूप से हम अपनी चर्चा में राबर्ट सोलो द्वारा प्रस्तावित एक अरैखिक संवृद्धि प्रतिमान तथा आवर्तन और अनावर्तन को सम्मिलित करेंगे।

16.1.1 सोलो प्रतिमान [Solow Growth Model]

आईए हम जाने कि एक संवृद्धि प्रतिमान से हम क्या समझते हैं। क्योंकि हम गतिकी पर चर्चा कर रहे हैं, हम यह देखना चाहेंगे कि एक चर किस प्रकार समय के साथ विकसित होता है। यहाँ हम यह मानते हैं कि समय असतत् स्तर पर परिवर्तित होता है। आर्थिक संवृद्धि के सिद्धांत में हम देखते हैं कि किस प्रकार कुल उत्पाद या आय समय के साथ परिवर्तित होते हैं। हम इस सेमेस्टर में 'व्यष्टि अर्थशास्त्र के सिद्धांत' पाठ्यक्रम में पाठकों का परिचय एक उत्पादन फलन से करवा चुके हैं जो उत्पाद, श्रम तथा पूँजी पर निर्भर एक फलन होता है। यहाँ हम पूरी अर्थव्यवस्था के लिए एक कुल उत्पादन फलन पर विचार करेंगे।

'समष्टि अर्थशास्त्र सिद्धांत' पाठ्यक्रम के अंतर्गत पाठकों का परिचय कुल समुच्चीकृत अर्थव्यवस्था के अध्ययन से, अर्थात् किसी अर्थव्यवस्था के समष्टीगत पक्ष से होगा। दोनों पाठ्यक्रमों के अध्ययन से बनी हमारी समझ के आधार पर, हम यहाँ पर मूलतः यह जाँच कर रहे हैं कि किस प्रकार कुल उत्पाद या जिसे हम किसी अर्थव्यवस्था का कुल घरेलू उत्पाद कहते हैं, कुल श्रम तथा पूँजी (मशीनरी तथा उपकरण) में वृद्धि के परिणाम स्वरूप समय के साथ वर्धित होता है।

प्रोफेसर राबर्ट सोलो ने वर्ष 1956 में आर्थिक संवृद्धि का एक प्रतिमान प्रतिपादित किया था। यह प्रतिमान अर्थशास्त्रीय विश्लेषण का केंद्रीय/मुख्य प्रतिमान बन गया है और वह आधारभूत प्रतिमान बन गया है जिसके आधार पर संवृद्धि पर आगे काफी कार्य किया गया है और नए प्रतिमान सुझाए गए हैं। इस प्रतिमान के लिए प्रो. सोलो को 1987 में अर्थशास्त्र में नोबेल पुरस्कार दिया गया। राबर्ट सोलो का आर्थिक संवृद्धि प्रतिमान, जिसपर हम यहाँ विचार करने जा रहे हैं, संवृद्धि का नवशास्त्रीय प्रतिमान भी कहलाता है। इस प्रतिमान में दो चर वाला अंतर समीकरण होता है परंतु संवृद्धि प्रतिमानों में प्रयुक्त होने वाली एक सामान्य तकनीक से इसे एक चर वाले अंतर समीकरण में परिवर्तित किया जा सकता है। हम एक समुच्चीकृत (aggregate) उत्पादन फलन से प्रारंभ करते हैं :

$$Y_t = f(K_t, L_t)$$

जहाँ Y कुल उत्पाद है, K कुल पूँजी तथा L कुल श्रम है। प्रत्येक चर के साथ संलग्न पादांक यह दर्शातें हैं कि उत्पादन प्रक्रम/प्रक्रिया में कोई विलम्ब/अंतराल (lag) नहीं है।

स्थिति को सरल बनाने के लिए हम यह मानते हैं कि श्रम (जिसे हम जनसंख्या के समरूप मानते हैं, अर्थात् श्रम बल में भागीदारी की दर 100 प्रतिशत है) बहिर्जात अनुपातिक दर n पर बढ़ता है। दूसरे शब्दों में, हम निम्नलिखित अंतर समीकरण प्राप्त करते हैं :

$$L_t = (1+n)L_{t-1}$$

पूंजी, निवल निवेश के परिणामस्वरूप बढ़ती है। इसे कुल निवेश में से अवमूल्यन को घटा कर प्राप्त किया जाता है। अतः, निवल निवेश को दो क्रमिक समय अंतरालों में पूँजी की मात्रा में परिवर्तन के रूप में परिभाषित किया जाता है। यह एक नवशास्त्रीय प्रतिमान है, अतः सारी बचत को उत्पादक भौतिक पूँजी के रूप में निवेश किया जाता है। अतः, निवेश को बचत के बराबर माना जाता है। नीचे दिए समीकरण पर विचार कीजिए जिसमें अंतराल t पर पूंजी का मान (K_t), अंतराल $t-1$ पर पूँजी (K_{t-1}) के फलन के रूप प्राप्त होता है :

$$K_t = sF(K_{t-1}, L_{t-1}) + (1-\delta)K_{t-1}$$

यहाँ, s औसत बचत अनुपात अर्थात् $\frac{S}{Y}$ है। अतः, $S = sY = sF(K,L)$ है। हम बचत S को भी निवेश I के बराबर मान रहे हैं। अतः, हम इसे $I = sF(K,L)$ से व्यक्त कर सकते हैं। यह स्पष्ट होना चाहिए कि

$I_{t-1} = K_t - K_{t-1}$ है। इससे हमें प्राप्त होता है कि $K_t = I_{t-1} + K_{t-1}$ है। यदि हम δ की दर से मूल्यह्रास घटाएं, तो हम $K_t = I_{t-1} + (1-\delta)K_{t-1}$ प्राप्त करते हैं। I_t के स्थान पर $sF(K_{t-1}, L_{t-1})$ रखने पर हम पाते हैं कि $K_t = sF(K_{t-1}, L_{t-1}) + (1-\delta)K_{t-1}$ है।

ध्यान दें समय अंतराल t में आने वाली नई पूँजी के लिए अंतराल $t-1$ में बचत की जाती है। ऊपर दिया गया समीकरण हमें यह बताता है कि वर्तमान अंतराल की पूँजी (K_t) पिछले अंतराल की पूँजी में से मूल्यह्रास $[(1-\delta)K_{t-1}]$ को घटाकर प्राप्त हुए भाग तथा पिछले वर्ष की आय (उत्पाद) से की गई बचत (जो कि निवेश के बराबर होती है तथा जो कि नए अंतराल में नई पूँजीगत वस्तुओं तथा उपकरणों के माध्यम से व्यक्त होती है) के बराबर, अर्थात् $[sF(K_{t-1}, L_{t-1})]$ होती है।

आईए अब हम उत्पादन फलन के लिए भी एक कल्पना करें। हम मान कर चलते हैं कि उत्पादन फलन, पैमाने का स्थिर प्रतिफल दर्शाता है। इसका अर्थ है कि यदि श्रम और पूँजी में λ गुणा वृद्धि होती है तो उत्पादन भी उसी गुणक से अर्थात् λ गुणा हो जाएगा। अर्थात् पैमाने के स्थिर प्रतिफल, [CRS] से हमें प्राप्त होता है :

$$\lambda Y_t = F(\lambda K_t, \lambda L_t)$$

मान लीजिए $\lambda = \frac{1}{L_t}$ है। इस स्थिति में हम पाते हैं कि $\frac{F(K_t, L_t)}{L_t} = F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right)$ है, जहाँ $\frac{K_t}{L_t}$ वर्तमान पूँजी–श्रम अनुपात है। समीकरण का दायाँ पक्ष वह राशि दर्शाता है जो कि एक अकेला श्रमिक उत्पादित करेगा यदि उसे वर्तमान पूँजी–श्रम अनुपात के

बराबर पूँजीगत स्टॉक उपलब्ध हो। इस समीकरण का बायाँ पक्ष प्रति श्रमिक/व्यक्ति उत्पादन को दर्शाता है तथा इसे y_t से व्यक्त किया जाता है।

हम ऊपर प्राप्त समीकरण को $y_t = f(k_t)$ के रूप में लिख सकते हैं जहाँ $k_t = \frac{K_t}{L_t}$ है। यहाँ हमने प्रति व्यक्ति उत्पादन को प्रति व्यक्ति पूँजी के फलन के रूप में दर्शाया है। अब ऊपर प्राप्त किए गए समीकरण $K_t = sF(K_{t-1}, L_{t-1}) + (1-\delta)K_{t-1}$ पर ध्यान दें। आईए हम इस समीकरण के दोनों पक्षों को L_t से विभाजित करें। इससे हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{K_t}{L_t} = s\frac{F(K_{t-1}, L_{t-1})}{L_t} + \frac{(1-\delta)K_{t-1}}{L_t}$$

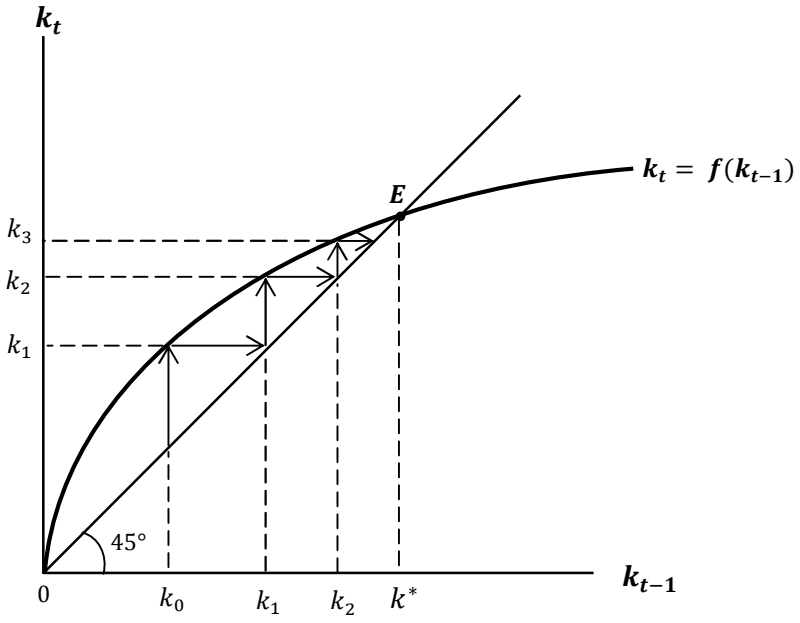
इस समीकरण के दाएँ पक्ष में दोनों समय अवधियों $t-1$ और t से संबंधित पद हैं। इसके समाधान के लिए, आईए हम दाएँ पक्ष के प्रत्येक पद को L_{t-1} से गुणा तथा विभाजित करें। ऐसा करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{K_t}{L_t} = \left(\frac{sF(K_{t-1}, L_{t-1})}{L_{t-1}}\right)\left(\frac{L_{t-1}}{L_t}\right) + \left(\frac{(1-\delta)K_{t-1}}{L_{t-1}}\right)\left(\frac{L_{t-1}}{L_t}\right) \quad \ldots(4)$$

इस समीकरण में पद $\frac{F(K_{t-1}, L_{t-1})}{L_{t-1}}$ समय अवधि $t-1$ में प्रति व्यक्ति उत्पादन है तथा पद $\frac{K_{t-1}}{L_{t-1}}$ समय अवधि $t-1$ में पूँजी–श्रम अनुपात है। हमने ऊपर देखा कि $L_t = (1+n)L_{t-1}$ है। इससे हम पाते हैं कि $\frac{L_{t-1}}{L_t} = \frac{1}{(1+n)}$ है। प्रति व्यक्ति मात्राओं के संकेत चिह्नों का प्रयोग करने पर जिन्हें हम पहले ही परिभाषित कर चुके हैं, हम समीकरण (4) को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$k_t = \frac{sf(k_{t-1})}{1+n} + \left(\frac{1-\delta}{1+n}\right)k_{t-1} \quad \ldots(5)$$

यहाँ n और δ बहिर्जात हैं (अर्थात् प्रतिमान के बाहर से दिए हुए तथा निश्चित हैं)। अतः, हम एक प्रथम–कोटि अंतर समीकरण प्राप्त करते हैं जैसा कि समीकरण (5) में दर्शाया गया है, जिसमें k_t, k_{t-1} का फलन है। हमने $f(k_t)$ को एक परिशुद्ध फलन के रूप में व्यक्त नहीं किया है, अतः हम स्वयं को समीकरण (5) के एक गुणात्मक, प्रावस्था आरेख विश्लेषण तक सीमित रखते हैं। हम देख सकते हैं कि प्रति व्यक्ति उत्पादन फलन $y_t = f(k_t)$ के गुणधर्म सामान्य उत्पादन फलन के समान ही हैं। साथ ही $f'(x) > 0$ तथा $f''(x) < 0$ है। इन मान्यताओं के आधार पर हम एक प्रावस्था आरेख बना सकते हैं जैसा कि रेखाचित्र 16.5 में दर्शाया गया है।



रेखाचित्र 16.5 : एक नवशास्त्रीय संवृद्धि प्रतिमान का प्रावस्था आरेख

संतुलन बिंदु पर $k_{t-1} = k_t = k^*$ (मान लीजिए) है। इस प्रकार, यद्यपि हमारे पास $f(x)$ की एक सुस्पष्ट परिभाषा नहीं है, तो भी हम देख सकते हैं कि समीकरण (5) संबंध

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{(n+\delta)}{s}$$

को संतुष्ट करता है।

16.4.2 आवर्तन तथा अनावर्तन [Cycles and Chaos]

अभी तक हमने केवल उन्हीं अरैखिक अंतर समीकरणों पर विचार किया है जिनके लिए फलन $f(.)$ की ढाल अपना चिह्न नहीं बदलती, अर्थात् x_t+1 का x_t के सापेक्ष/प्रति या x_t का x_t+1 के सापेक्ष आलेख अपना चिह्न नहीं बदलता। दूसरे शब्दों में, प्रावस्था आरेख में x_t+1 के सापेक्ष x_t का आलेख, या तो एक दिष्ट वर्धमान अथवा एकदिष्ट ह्रासमान होता है परंतु कभी भी पर्वत के आकार का (उल्टे U के आकार का) या घाटी के आकार का (U के आकार का नहीं होता)। इस उप-अनुच्छेद में, उन अरैखिक अंतर समीकरणों पर विचार करते हैं जो प्रावस्था आरेख में पर्वत के आकार के वक्रों को उत्पन्न करते हैं। इस प्रकार के अंतर समीकरणों में रोचक गत्यात्मक व्यवहार देखने को मिलता है जैसे कि चक्र, जो प्रत्येक दो या तीन समय अवधियों में स्वयं को दोहराते हैं या फिर ऐसे गत्यात्मक प्रक्रम जिनमें x_t के व्यवहार में अनियमितता होती है। इस प्रकार के अनियमित प्रक्रम को अनावर्तन (*Chaos*) कहते हैं। ऐसी चक्रीय अथवा अव्यवस्थित व्यवहार का विस्तार में विश्लेषण करना इस इकाई के विषय-क्षेत्र से बाहर है। अतः, हम इस इकाई में इन विषयों का केवल परिचयात्मक उल्लेख करेंगे।

नीचे दिए प्रथम–कोटि, अरैखिक, स्वायत अंतर समीकरण पर विचार कीजिए :

$$x_{t+1} = A\, x_t\,(1 - x_t), \text{ where } t = 0, 1, 2,... \qquad \ldots(6)$$

संतुलन $\bar{x}$ मान निम्नलिखित समीकरणों को हल करने से प्राप्त होते हैं

$$\bar{x} - A\bar{x}\,(1 - \bar{x}) = 0 \Longrightarrow A\bar{x}^2 - A\bar{x} + \bar{x} = 0$$

$$\Longrightarrow A\bar{x}^2 + \bar{x}(1 - A) = 0 \Longrightarrow \bar{x}^2 + \bar{x}\frac{(1 - A)}{A} = 0$$

इस प्रकार हम पाते हैं :

$$\bar{x}\left[\left(\frac{1 - A}{A}\right) + \bar{x}\right] = 0$$

हमें दो संतुलन बिंदु $\bar{x} = 0$ तथा $\bar{x} = \left(\frac{A-1}{A}\right)$ प्राप्त होते हैं। दूसरे संतुलन बिंदु के आधार पर हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि स्थायी-अवस्था संतुलन केवल तभी प्राप्त होता है जब A > 1 हो। यदि A ≤ 1 हो, तो स्थायी-अवस्थाएं शून्य या ऋणात्मक होती हैं। हम ऐसी अवस्थाओं पर चर्चा नहीं करेंगे क्योंकि अर्थशास्त्र में इनका कोई विशेष महत्व नहीं है। स्मरण करें कि हमने प्रावस्था आरेखों पर चर्चा करते हुए पाया था कि किसी प्रथम-कोटि, स्वायत, अरैखिक अंतर समीकरण का स्थायी-अवस्था संतुलन बिंदु स्थानीय रूप से स्थिर होता है यदि इसकी ढाल का निरपेक्ष मान, अर्थात् संतुलन बिंदु पर इसका अवकलन 1 से कम हो। समीकरण (6) में प्राप्त दो स्थायी बिंदुओं $\bar{x} = 0$ तथा $\bar{x} = \left(\frac{A-1}{A}\right)$ पर अवकलज के मान इस प्रकार हैं

$$\frac{dx_{t+1}}{dx_t} = A - 2Ax_t$$

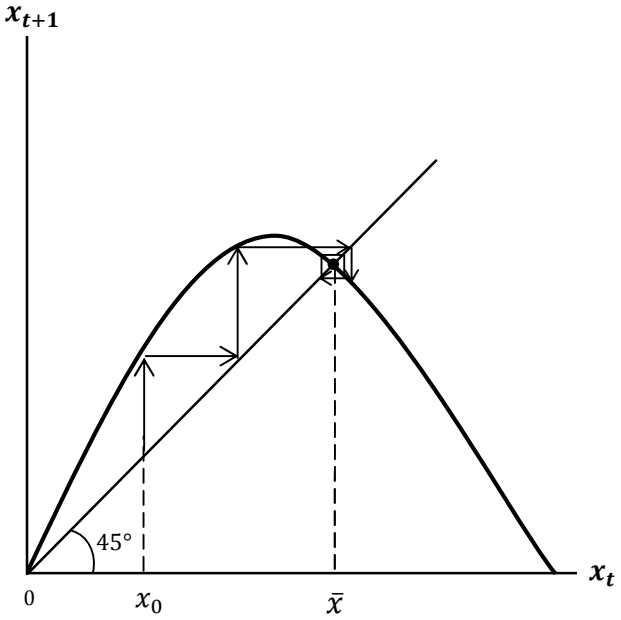
$\bar{x} = 0$ पर $\frac{dx_{t+1}}{dx_t} = A$ है और $\bar{x} = \frac{A-1}{A}$ पर $\frac{dx_{t+1}}{dx_t} = 2 - A$ है।

ऊपर प्राप्त परिणाम यह दर्शाते हैं कि स्थायी बिंदु $\bar{x} = 0$ अस्थिर है क्योंकि हमने $A > 1$ माना है। बिंदु $\bar{x} = \frac{A-1}{A}$

स्थानीय रूप से केवल तभी स्थायी होगा यदि $2 - A$ का निरपेक्ष मान अर्थात् $|2 - A| < 1$ हो, अर्थात् यदि $1 < A < 3$ हो। ध्यान दें कि अनुच्छेद 16.2 में प्राप्त आधारभूत नियम (i) यही है।

क्योंकि ऊपर लिया गया समीकरण एक प्रथम-कोटि अरैखिक अंतर समीकरण है, हम इस के लिए एक प्रावस्था आरेख बना सकते हैं। प्रावस्था रेखा का 45^0 रेखा का प्रतिच्छेदन समीकरण के स्थायी बिंदुओं पर, अर्थात्, 0 और $\left(\frac{A-1}{A}\right)$ पर प्राप्त होगा। आलेख का अधिकतम मान $x = \frac{1}{2}$ पर होगा, जहाँ ढाल $\frac{dx_{t+1}}{dx_t} = 0$ होगी। फलन का दूसरा अवकलज $\frac{d^2x_{t+1}}{dx_t{}^2} = -2A$ है, जो कि ऋणात्मक है। यह दर्शाता है कि फलन का आलेख उल्टे U के आकार का होगा (रेखाचित्र 16.6 देखें)

इस आरेख से पाठक स्वयं देख सकते हैं कि प्रावस्था रेखा का 45^0 रेखा के साथ प्रतिच्छेदन, अधिकतम मान बिंदु के बाई ओर होगा यदि $1 < A < 2$ है। इसका अर्थ है कि स्थिर स्थायी बिंदु $\bar{x} = \frac{A-1}{A}$ पर ढाल धनात्मक है। जबकि, यदि $2 < A < 3$ तो प्रतिच्छेदन स्थिर स्थायी बिंदु के दाहिनी ओर होगा।



रेखाचित्र 16.6

यह स्थानीय स्थिरता के प्रतिबंध को संतुष्ट करता है क्योंकि स्थिर स्थायी बिंदु पर प्रावस्था रेखा की ढाल ऋणात्मक होगी।

1 से कम निरपेक्ष मान वाली ऋणात्मक ढाल का अर्थ है कि x_t, $\bar{x}$ के एक प्रतिवेश के अंदर रहते हुए $\bar{x}$ की ओर किसी भी दिशा से अभिसरित होगा परंतु $\bar{x}$ की ओर जाने का पथ दोलनी होगा। रेखाचित्र 16.6 को देंखे। x_0 से प्रारंभ होकर जहाँ ढाल धनात्मक है, x_t पहली कुछ समय अवधियों एक दिष्ट रूप से बढ़ता है। लेकिन जब x_t, $\bar{x}$ के प्रतिवेश में पहुँचता है, ढाल ऋणात्मक हो जाता है तथा x_t की गति प्रतिवेश में दोलनी हो जाती है और अंततः स्थायी अवस्था की ओर अभिसरित होता है।

यदि $A \geq 3$ है, तो प्रावस्था रेखा का व्यवहार क्या होगा? सर्वप्रथम, $\bar{x} = \frac{A-1}{A}$ अब स्थिर स्थायी अवस्था नहीं रहेगी, बल्कि अस्थिर हो जाएगी। दूसरे, पर्वत के आकार की प्रावस्था रेखा का एक विशिष्ट गुण है जो कि एक एकदिष्ट प्रावस्था आरेख के लिए सत्य नहीं होगा– अर्थात्, x_t अंतहीन रूप से 0 या अनंतता की ओर नहीं जाता बल्कि एक सीमित परिसर में दोलन करेगा यद्यपि यह स्थायी अवस्था की ओर अभिसरित नहीं होगा। परंतु यह नियमित आवर्ती व्यवहार दर्शाएगा।

जब एक अरैखिक अंतर समीकरण का इस प्रकार का उल्टे U के आकार का प्रावस्था आरेख प्राप्त होता है, फलन के व्यवहार में एक प्रभावसीमा उत्पन्न होती है। अर्थात् A के मान में छोटे से परिवर्तन से भी x के व्यवहार में और इसके प्रक्षेप-पथ में नाटकीय परिवर्तन होते हैं। उदाहरण के लिए, ऊपर दिए गए उदाहरण में, यदि A का मान 2 और 3 के बीच में हो, तो x प्रत्यावर्ती मान लेता है परंतु अभिसरण की ओर जाता है। जैसे ही A का मान 3 या उससे अधिक होता है, प्रक्षेप पथ अत्याधिक जटिल हो जाता है। 3 और 4 के बीच कुछ मानों के लिए, x_t आवर्ती प्रत्यावर्तन में स्थिर होता है। इसे सीमा चक्र भी कहते हैं। मूलतः इसका अर्थ है कि x केवल एक विशिष्ट परिसर में मान लेता है और इसी परिसर के अंदर मानों का प्रत्यावर्तन (अदल-बदल) करता है। यह दर्शाया जा सकता है कि जब A का मान 3.2 है, यदि गतिक तंत्र लंबे समय तक

चलता है, तो यह एक ऐसे प्रतिरूप में स्थिर होगा जिसे आवर्त 2 का चक्र कहते हैं, यह मानों 0.519 और 0.799 के बीच प्रत्यावर्तित होता रहता है। यह एक सीमित चक्र में प्रत्यावर्तन का एक उदाहरण है। सीमित चक्र दोलन को जन्म देते हैं परंतु यह केवल उच्च-कोटि के अंतर समीकरणों में होता है। प्रत्यावर्तन सीमा चक्र का मूल-तत्व है। यह एक स्थिर सीमा चक्र का एक उदाहरण है।

फिर भी, ऐसी स्थितियाँ भी हो सकती है जब सीमा चक्र अस्थायी हो। इन चक्रों के मूलभूत गुणधर्म वही होते हैं जो कि एक अस्थिर संतुलन के होते हैं। इनकी मूल विशिष्टता यह है कि यदि हम सीमा चक्र में एक मान से प्रारंभ करें, तो हम सदा उसी चक्रीय पथ में रहेंगे, न अभिसरण होगा, न अपसरण, यदि हम चक्र के बाहर किसी भी ओर एक मान से प्रारंभ करें तो हम चक्र से दूर अपसरण करेंगे।

यदि हम A का मान सुस्थिर रूप से बढ़ाएं, विभिन्न परिणाम निकल कर आते हैं। यदि A = 3.4 हो, तो वह अंतराल जिसमें x का मान स्थित होगा बड़ा होगा परंतु फिर भी यह दो मानों के बीच रहेगा। यदि A = 3.5 हो, तंत्र एक आवर्त 4 के चक्र में रहता है, जो कि $x = 0.382$ से $x = 0.327$ फिर $x = 0.501$ तक और फिर $x = 0.875$ तक जाएगा। परंतु यदि A का मान थोड़ा अधिक जैसे कि A = 3.84 हो, तंत्र वापिस आवर्त 3 के चक्र में आ जाता है।

A के मानों के बारे में एक रोचक तथ्य यह है कि इसके प्रत्यार्पण की आवर्ति सदैव एकसार नही होती। यहीं अव्यवस्था की स्थिति पैदा होती है। यदि हम A = 3.85 लें तो हम पाएंगे कि तंत्र एक ऊँचे/ऊपरी संतुलन बिंदु के आस-पास एकांतरित होता है, परंतु कभी अपने आपको दोहराता नहीं। यह ऐसा कोई प्रतिरूप नहीं दर्शाता जो बार-बार अपने को दोहराता हो। यह अनावर्ती हो जाता है। दूसरे शब्दों में, तंत्र अव्यवस्थित हो जाता है।

अव्यवस्था का अध्ययन अर्थशास्त्र में किस प्रकार उपयोगी है? सर्वप्रथम, अव्यवस्था और एक यादृच्छिक प्रक्रम में अंतर करना अत्यंत कठिन है। और यह यादृच्छिक प्रक्रम क्या है? अगले सेमेस्टर में आप सांख्यिकी के पाठ्यक्रम में अनश्चितता और प्रायिक्ता के बारे में अध्ययन करेंगे। कुछ पाठक पहले से ही प्रायकिता से परिचित होंगे। यादृच्छिक प्रक्रम प्रायिकता से संबद्ध है। एक यादृच्छिक चर एक ऐसा चर होता है जिसका मान संयोग पर निर्भर होता है। अयादृच्छिक प्रक्रम या ऐसे प्रक्रम जो प्रायिकता पर आधारित नहीं होते, निर्धारणात्मक प्रक्रम कहलाते हैं। गत्यात्मक प्रक्रम, जिन्हें हमने रैखिक एवं अरैखिक अंतर समीकरणों के माध्यम से पढ़ा है, निर्धारणात्मक प्रक्रम हैं। अनावर्ति का महत्व यह है कि अव्यवस्था ऐसी स्थिति को चित्रित करती है जिसमें एक निर्धारणात्मक प्रक्रम एक यादृच्छिक प्रक्रम के प्ररिरूप की नकल करता है। इसलिए एक यादृच्छिक प्रक्रम और अव्यवस्था में अंतर करना अत्यंत कठिन होता है। एक यादृच्छिक प्रक्रम और अनावर्तक प्रक्रम में मुख्य भेद यही है कि यादृच्छिक प्रक्रम का पूर्वानुमान नहीं लगाया जा सकता। जबकि एक अनावर्तक तंत्र में, यदि प्राचल दिए हों, तो आगे आने वाले मानों का अनुमान सरलता से लगाया जा सकता है।

बोध प्रश्न 3

1) सोलो संवृद्धि प्रतिमान के मूलभूत अंतर समीकरण की व्याख्या कीजिए।

.....

2) क) एक अव्यवस्थित तंत्र के प्रावस्था आरेख का मूलभूत आकार क्या होता है?

.....

.....

.....

.....

.....

ख) एक सीमा चक्र से आप क्या समझते हैं?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) अर्थशास्त्र में अनावर्ती/अव्यवस्था किस प्रकार महत्वपूर्ण है? एक अव्यवस्थित प्रक्रम, एक यादृच्छिक प्रक्रम से किस प्रकार भिन्न है?

.....

.....

.....

.....

.....

16.5 सार-संक्षेप

इकाई 15 रैखिक अंतर समीकरणों पर केन्द्रित थी। पिछली इकाई की तरह, इकाई 16 में भी हमने असतत् गत्यात्मक प्रक्रमों की चर्चा की, अर्थात्, वे प्रक्रम जिनमें एक चर का मान, उसी चर के पूर्व मानों पर निर्भर करता है चर अपने मान असतत् चरणों में परिवर्तित करते है, न कि संतत। यह इकाई व्यापक अंतर समीकरणों पर आधारित थी, रैखिक अंतर समीकरण भी जिनके एक विशिष्ट प्रकार थे। अतः, इस इकाई के शीर्षक में प्रयुक्त पद 'अरैखिक' को व्यापक अंतर समीकरण के रूप में लिया जाना चाहिए न कि ऐसे अंतर समीकरणों के रूप में जो अनिवार्यतः रैखिक न हों। इस इकाई का प्रारंभ अंतर समीकरणों की व्यापक प्रकृति की व्याख्या से हुआ। हमने देखा कि रैखिक अंतर समीकरण एक विशिष्ट प्रकार के अंतर समीकरण हैं। इस इकाई को हमने केवल प्रथम-कोटि अंतर समीकरणों, अर्थात, ऐसे अंतर समीकरणों तक सीमित रखा जिसमें चर का समय अवधि t में मान केवल चर के $t-1$ समय अवधि के मान पर निर्भर करता है, $t-2$, $t-3$ इत्यादि समय अवधियों के मानों पर नहीं। अतः, चर का मान केवल चर के ठीक पीछे वाले मान पर निर्भर करता है। चर के और पुराने मानों पर नहीं। हमने देखा कि हम समीकरण में बिना समीकरण के प्रथम-कोटि गुण को बदले समय अवधि को

बदल सकते हैं। अर्थात्, हम अवधि $t + 1$ में चर का मान, केवल चर के समय अवधि t के मान के पद में ज्ञात कर सकते हैं।

अगले अनुच्छेद में पाठकों का परिचय प्रावस्था आरेख (या प्रावस्था रेखा) से करवाया गया जिनसे हमें प्रथम-कोटि, अरैखिक स्वायत अंतर समीकरणों को चित्रित करने में तथा उसके संभावित हल के बारे में चर्चा करने में सहायता मिली। प्रावस्था आरेख में चर के वर्तमान मान को क्षैतिज अक्ष पर अंकित किया जाता है तथा आगे आने वाले मान को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर/या चर के पूर्व मान को क्षैतिज अक्ष पर तथा वर्तमान मान को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर। हमने पाया कि जबकि प्रथम-कोटि अरैखिक अंतर समीकरण को निरूपित करने वाला वक्र 45^0 रेखा को एक से अधिक बिंदुओं पर काट सकते है। जबकि है प्रथम-कोटि रैखिक अंतर समीकरणों में यह संभव नहीं है। यदि ऐसे अंतर समीकरण को निरूपित करने वाला वक्र बढ़ते हुई ढाल वाला हो तो संतुलन बिंदु (स्थायी बिंदु) अभिसारी या अपसारी हो सकता है। कम होती हुई ढाल वाला वक्र दोलन उत्पन्न करता है। क्योंकि इस इकाई में हम केवल प्रथम-कोटि अंतर समीकरणों तक ही सीमित थे, हम मुख्यतः आरेखीय हल प्राप्त करने की विधियों पर ही निर्भर रहे। अतः, प्रावस्था आरेख विश्लेषण एक महत्वपूर्ण उपकरण के रूप में सामने आया।

इससे अगले अनुच्छेद में हमने अरैखिक अंतर समीकरणों को रैखिक समीकरणों में परिवर्तित करने की विधियों पर विचार किया। इसके लिए, हमने फलन $f(x)$ के किसी उचित बिंदु पर टेलर श्रेणी प्रसार का उपयोग किया। इससे अगले अनुच्छेद में हमने अरैखिक अंतर समीकरणों के दो अनुप्रयोगों पर चर्चा की सोलो संवृद्धि प्रतिमान और आवर्ती चक्रों तथा आवर्ती अव्यवस्था (अनावर्तिता) पर। सोलो संवृद्धि प्रतिमान में हमने प्रति-व्यक्ति उत्पाद को प्रति व्यक्ति पूँजी के फलन के रूप में देखा तथा इस फलन का समय के संदर्भ में (इस फलन की गत्यात्मकता) अध्ययन किया। इस स्थिति के लिए एक प्रावस्था आरेख उपलब्ध करवाया गया जिस में एक समय अवधि में पूँजी-श्रमिक अनुपात को ऊर्ध्वर अक्ष पर दर्शाया गया तथा उत्पाद-श्रमिक अनुपात को क्षैतिज अक्ष पर। हमने एक अरैखिक अंतर समीकरण की सहायता से वर्तमान अवधि की पूँजी प्रति व्यक्ति और पिछली अवधि के पूँजी प्रति व्यक्ति से संबद्ध गत्यात्मकता को दर्शाया।

अंत में, इस इकाई में उन गत्यात्मक प्रक्रमों की चर्चा की गई जिनमें अरैखिक फलनों के प्रावस्था आरेख उल्टे U के आकार के हों। ऐसे प्रावस्था आरेखों के महत्वपूर्ण गुणधर्मों की चर्चा इस आधार पर की गई कि फलन का अधिकतम बिंदु 45^0 रेखा के बाईं ओर स्थित है या दाईं ओर। इस प्रकार के द्विघात अंतर समीकरण की सहायता से, हमने सीमा चक्रों और अनावर्ती चक्रों का अध्ययन किया।

अनावर्ती चक्र वाली स्थिति को अव्यवस्था कहते हैं। अंत में हमने देखा कि वास्तव में अव्यवस्थित व्यवहार, यादृच्छिक प्रक्रमों के व्यवहार की नकल करता है।

16.6 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) एक अरैखिक अंतर समीकरण एक ऐसा समीकरण है एक चर के एक समय अवधि में मान को उसी चर के पिछली समय अवधियों के मानों से संबद्ध करता है। समीकरण को निरूपित करने वाले फलन का आकार किसी आकार विशेष

तक सीमित नहीं है। एक रैखिक अंतर समीकरण एक अरैखिक अंतर समीकरण की एक विशिष्ट स्थिति है।

2) एक प्रावस्था आरेख, एक चर के मानों को ऊर्ध्वाधर अक्षपर तथा उसी चर के पिछली समय अवधि के मानों को क्षैतिक अक्ष पर अंकित करता है। यह प्रथम-कोटि अंतर समीकरणों को दर्शाता है। इसमें एक 45^0 रेखा होती और फलन का इस 45^0 रेखा से प्रतिच्छेदन हमें संतुलन बिंदुओं की पहचान करने में मदद करता है।

3) क) एक रैखिक अंतर समीकरण में एक संतुलन बिंदु होता है, एक अरैखिक समीकरण के एक से अधिक संतुलन बिंदु होते है।

ख) एक स्थिर संतुलन बिंदु को एक अभिसारी तथा एक अस्थिर संतुलन बिंदु को अपसारी कहते हैं।

बोध प्रश्न 2

1) हम एक अरैखिक अंतर समीकरण को रैखिक समीकरण में इसलिए परिवर्तित करते हैं कि हम समीकरण की स्थिरता की जाँच कर सकें।

2) हम एक अरैखिक अंतर समीकरण को उसके संतुलन बिंदु के सामीप्य में रैखिक बनाने के लिए प्रथम-कोटि टेलर श्रेणी प्रसार का प्रयोग कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 3

1) सोलो प्रतिमान का आधारभूत अरैखिक अंतर समीकरण पूँजी-श्रम अनुपात को पिछली समय अवधि में इसके मान से संबद्ध करता है। इसी फलन का प्रावस्था आरेख बनाया जाता है।

2) क) एक अव्यवस्थित गत्यात्मक तंत्र (के आरेख) का आकार मूलतः एक पर्वत के आकार का होता है जबकि सभी द्विघात फलनों का व्यवहार अव्यवस्थित नहीं होता।

ख) एक सीमा चक्र, एक ऐसे समय अंतराल में, जिसमें फलन अपने सीमित मान लेता है, एक आवर्ती नियमित चक्रीय व्यवहार दर्शाता है।

3) अर्थशास्त्र में अव्यवस्था या अनावर्तिता महत्वपूर्ण है क्योंकि यह दर्शाती है कि किस प्रकार एक निर्धारणात्मक समीकरण एक अनियमित अनावर्ती चक्रीय व्यवहार को जन्म देता है। एक यादृच्छिक प्रक्रम में आगे आने वाले मानों का अनुमान नहीं लगाया जा सकता (यही एक यादृच्छिक चर की प्रकृति है) जबकि एक अव्यवस्थित गत्यात्मक प्रक्रम में आगे आने वाले मानों का अनुमान लगाया जा सकता है।

शब्दावली

अचर (Constant) : मात्रा जो दी गई समस्या या स्थिति के संदर्भ में स्थिर रहती है।

स्थिर फलन (Constant function) : फलन जिसका परिसर सिर्फ एक अवयव का होता है **स्थिर फलन** कहलाता है।

सांतत्य/सतत चर (Continuous Variable) : यदि x दी गई संख्या a से अन्य दी गई संख्या b तक अंतराल में सभी संभावित वास्तविक मान ग्रहण करता है, तो x को **सतत चर** कहा जाता है।.

प्रांत (Domain) : x का फलन जो दिए गए प्रांत के लिए परिभाषित है, मात्रा y है, जिसका अपने प्रांत में x के प्रत्येक मान के लिए एकक एवं निश्चित मान होता है। प्रांत समुच्चय है जिस पर फलन की व्याख्या की जाती है।

समतुल्यता संबंध (Equivalence relation) : समुच्चय जो अवयवों को इकट्ठा/सामूहित करता है जिससे किसी प्रकार "समतुल्य" हो के दो अवययों के बीच द्विआधारी संबंध कि "$a \equiv b$" के समतुल्य है "$a \sim b$" के रूप में निरूपित करते हैं। समतुल्यता संबंध स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है।

फलन (Function) : एक समुच्चय (प्रांत) के सदस्य या सदस्यों के अनुक्रम को दूसरे समुच्चय (परिसर) के सदस्य के साथ संबंधित करने के लिए नियम। यह आश्रित चर (चरों) और स्वतंत्र चर (चरों) के बीच संगति का नियम है ताकि स्वतंत्र चर को निर्दिष्ट प्रत्येक मान के लिए आश्रित चर के लिए अनुरूप अद्भूत मान निर्धारित हो सके।

एकैकी फलन (Injective Function) : वह फलन जो भिन्न स्वतंत्र चरों को (arguments) के भिन्न मानों से जोड़ता है। यानि कि, फलन f एकैकी कहा जाता है यदि वह प्रांत में भिन्न x को सहप्रांत में भिन्न y के साथ मानचित्रित करता है इस तरह की $f(x) = y$ हो।

प्रतिच्छेदन (Intersection) : दो समुच्चय A और B द्वारा बना समुच्चय जिसमें a के बारे अवयव हैं जो कि B के भी अवयव हैं (या समतुल्य रूप में, B के सारे अवयव जो A के भी हैं), परंतु अन्य कोई अवयव नहीं।

प्रतिलोम फलन (Inverse Function) : फलन $y = f(x)$ का प्रतिलोम $x = f^{-1}(y)$ के रूप में परिभाषित किया जाता है।

एकदिष्ट फलन (Monotone Function) : फलन जो हमेशा बढ़ता या घटता है एकदिष्ट वर्द्धमान (या ह्रासमान) फलन कहा जा सकता है।

शून्य फलन (Null Set – empty set) : अद्भूत समुच्चय जिसमें कोई अवयव नहीं होते हैं।

प्राचल (Parameter) : मात्रा जो किसी समस्या के पूरे दौरान एक ही मान बनाए रखती है परंतु भिन्न समस्या में भिन्न मान रख सकती है।

बहुपद फलन (Polynomial Function) : फलन जो धनात्मक पूर्णांक घातांकों के साथ घात फलनों का योग तथा अचरों के साथ गुणा किया गया है, जैसे $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 7 = 1x^3 + -2x^2 + 4x + 7x^0$ और घात फलन घातांक सूत्र द्वारा दिया जाता है, जहाँ स्वतंत्र चर चरघातांकी का आधार है, जैसे $x^3, x^{-2}, x^{1/2}, x^{\pi}$, इत्यादि।

घात समुच्चय (Power Set) : समुच्चय के उपसमुच्चयों का समुच्चय S का घात समुच्चय है।

उचित उपसमुच्चय (Proper Subset) : समुच्चय S_2, समुच्चय S_1 का उचित उपसमुच्चय है यदि S_2 का प्रत्येक अवयव S_1 है और S_1 में कुछ अवयव हैं जो S_2 में नहीं हैं।

फलन का परिसर (Range of a Function) : फलन $f(x) = y$ के सभी आउटपुट मानों का समुच्चय। f का परिसर सहप्रांत Y का उपसमुच्चय है।

परिमेय फलन (Rational Function) : दो **बहुपद फलनों** के अनुपात का व्यंजक।

समुच्चय (Set) : उन चीजों का संग्रह जो भिन्न तथा सुपरिभाषित हैं। इन चीजों को समुच्चय के **अवयव** कहा जाता है।

उपसमुच्चय (Subset) : समुच्चय A, समुच्चय B का उपसमुच्चय है, यदि A, B के अंदर है। एक समुच्चय का दूसरे समुच्चय का उपसमुच्चय होने का संबंध **समावेशन (inclusion)** कहलाता है।

आच्छादी (Surjective) : फलन f **आच्छादी** तब कहा जाता है यदि उसके मान उसके संपूर्ण सहप्रांत में फैल जाते हैं; यानि कि सहप्रांत में प्रत्येक y के लिए, प्रांत में कम से कम एक x होता है, ऐसे कि $f(x) = y$। वैकल्पिक रूप से, फलन $f : X \to Y$ आच्छादी है यदि और सिर्फ यदि उसका परिसर $f(x)$ उसके यह प्रांत के बराबर होता है। आच्छादी फलन **आच्छादन** कहलाता है, और **आच्छादक** भी कहा जाता है।

समुच्चयों का सम्मिलन (Union of sets) : दो समुच्चयों A और B का सम्मिलन, जिसे A B के रूप में लिखा जाता है, समुच्चय है जिसके अवयव A के या B के या दोनों के हैं।

चर (Variable) : संख्या का निरूपण, जोकि गणितीय संक्रिया के दौरान भिन्न संख्यात्मक मान ग्रहण कर सकती है।

अनंतस्पर्शी (Asymptote) : निर्देशांक समतल में ऊर्ध्वाकार तथा क्षैतिज रेखाएँ

कार्तीय निर्देशांक (Cartesian coordinates) : वह निकाय जिसमें समतल में बिन्दुओं की पहचान संख्याओं के क्रमित युग्म द्वारा की जाती है, यह बिन्दु दो या तीन लंबवत अक्षों से दूरी को निरूपित करते हैं।

निर्देशांक समतल (Coordinate plane) : समतल जो क्षैतिज संख्या रेखा जिसे x अक्ष कहते हैं, और ऊर्ध्वाधर संख्या रेखा, जिसे y अक्ष कहते हैं, और उस बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है जिसे मूल कहते हैं, द्वारा निर्धारित होता है। निर्देशांक समतल में प्रत्येक बिन्दु को संख्याओं के क्रमित युग्म द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है।

नियता (Directrix) : परवलय में, स्थिर रेखा जिससे परवलय के बिन्दुओं का रेखापथ समदूरस्थ होता है।

नाभि (Focus) : परवलय में, स्थिर बिन्दु जिससे परवलय के बिन्दुओं का रेखापथ समदूरस्थ होता है।

आश्रित चर (Dependent Variable) : समीकरण या फलन में, चर जिसका मूल्य/मान अन्य चर/चरों के मान पर निर्भर है।

अंतर्जात चर (Endogenous Variable) : मॉडल में, चर जिसके मानों को, मॉडल के हलों के रूप में निर्धारित करना पड़ता है।

बहिर्जात चर (Exogenous variable) : मॉडल में चर, जिन्हें मॉडल के अंदर निर्धारित नहीं किया जाता है बल्कि बाहर से दिया जाता है।

समीकरणों का युगपद् निकाय (Homogeneous System of Equations) : रैखिक समीकरणों का निकाय युगपद् है यदि, दाई ओर का प्रत्येक अचर शून्य के बराबर है।

असंगत समीकरण (Inconsistent Equations) : समीकरणों का निकाय जिससे किसी हल की लब्धि नहीं होती है।

स्वतंत्र चर (Independent Variable) : फलन या मॉडल में, चर जो आकस्मिक अनियत चर है/हैं, जो आश्रित चर को प्रभावित करते हैं।

रैखिक रूप से आश्रित चर (Linearly Dependent Equations) : समीकरणों के निकाय में कुछ इस प्रकार के समीकरण होते हैं जो रैखिक संक्रियाओं की श्रृंखला के द्वारा एक–दूसरे से व्युत्पन्न किए जाते हैं।

समीकरणों का अतिनिर्धारित निकाय (Overdetermined System of Equations) : m स्वतंत्र रैखिक समीकरणों का निकाय जो अज्ञात चरों के साथ असंगत नहीं है अति निर्धारित होता है यदि $m > n$ है।

प्राचल (Parameter) : वह मात्रा जो किसी विशेष समस्या के पूरे दौरान एक ही मान प्रतिधारित करती है परंतु भिन्न समस्या में भिन्न मानों का रूप ले सकती है।

समानति रूप (Reduced Form) : युगपद् समीकरणों के समुच्चय द्वारा वर्णित मॉडल में, जहाँ निकाय के हल के रूप में, अंतर्जात चर, सिर्फ प्राचलों के फलनों के रूप में व्यक्त किए जाते हैं।

संरचनात्मक रूप (Structural Form) : युगपद् समीकरण निकाय में, व्यवहारपरक संबंधों तथा संतुलन शर्तों का उपयोग करते हुए वास्तविक चित्रण।

कलन (Calculus) : गणित की वह शाखा जो परिवर्तन के साथ संबंध रखती है। इसका वर्णन परिवर्तन, गति तथा संवृद्धि के गणित के रूप में किया जाता है।

अवकल गणित (Differential Calculus) : कलन की वह शाखा है जो व्युत्पन्न फलन – दिए गए फलन से निकाला गया फलन ज्ञात करने के प्रपंच का अध्ययन करने का प्रयत्न करता है।

अवकलज (Derivative) : परिवर्तन के विचार को व्यक्त करता है और इस प्रतिबंध के आधार पर कि फलन सांतत्य है व्युत्पन्न फलन है। यदि फलन $y = f(x)$ है तो इसे अवकल गुणांक $\frac{dy}{dx}$ भी कहा जाता है।

सांतत्यता (Continuity) : फलन $f(x)$ सांतत्य **(continuous)** है बषर्ते कि उसका ग्राफ सांतत्य है, यानि कि सांतत्य फलन अपने ग्राफ के किसी भी बिंदु पर भंग नहीं होता है।

फलन की सांतत्यता (Continuity of a Function) : फलन f किसी बिन्दु c पर 2 होता है जब निम्नलिखित दो अपेक्षाएँ संतुष्ट हो जाती हैं:

- $f(c)$ अवश्य परिभाषित (या सीमांकित) होना चाहिए अर्थात् c, f के प्रांत का अवयव होना चाहिए)।
- जब x, c की ओर पहुँचता है तो $f(x)$ की सीमा मौजूद होनी चाहिए और $f(c)$ के बराबर होनी चाहिए (यदि f के प्रांत में बिन्दु c, प्रांत का सीमा बिन्दु नहीं है, तो यह स्थिति रिक्त रूप से यथार्थ है, क्योंकि x, c की ओर नहीं पहुँच सकता है।)

बिन्दु पर फलन की सीमा (Limit of a Function at a : मान लीजिए f संमिश्र–मानांकित फलन **(complex-valued function)** है, फिर हम

Point)		लिखते हैं कि $\lim_{x\to p} f(x) = L$ है यदि और सिर्फ यदि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए $\delta > 0$ इस तरह से विद्यमान है कि **सभी वास्तविक संख्याओं के लिए** $0 < \lvert x-p\rvert < \delta$, है तो हमारे पास $\lvert f(x)-L\rvert < \varepsilon$ होता है।
अनुक्रम की सीमा (Limit of a Sequence)	:	यदि किसी निर्धारित समीपता के लिए, अनुक्रम में सभी परंतु बिन्दुओं की परिमित संख्या L के बिन्दु L के उतना समीप है, तो बिन्दु L अनुक्रम की सीमा है।
सीमा (Limit)	:	फलन के व्यवहार का वर्णन अवधारणा किया करती है क्योंकि उसका कोणांक (स्वतंत्र चर) या तो किसी बिन्दु के समीप हो जाता है", या जब वह स्वेच्छागृहीत रूप से बड़ा बन जाता है; या जब उनके सूचकांक अनन्त रूप से बढ़ जाते हैं, तो अनुक्रम के अवयवों का व्यवहार बन जाता है।
एक पक्षीय सीमा (One-sided limit)	:	वास्तविक चर x के फलन $f(x)$ की दो सीमाओं में से कोई भी एक, जब x या तो नीचे ये या ऊपर से निश्चित बिन्दु की ओर बढ़ता है।
अनुक्रम (Sequence)	:	वस्तुओं (या घटनाओं) की क्रमित सूची। उदाहरण के लिए, (X, Y, Z) अक्षरों का अनुक्रम है जो (Y, Z, X) से भिन्न है क्योंकि क्रमित व्यवस्था अर्थ रखती है।
प्रतिअवकलज (Anti derivative)	:	समाकल
टनिश्चित समाकल (Indefinite Integral)	:	स्वेच्छ अचर से जुड़ा समाकल। इसका निष्चित संख्यात्मक मान नहीं हो सकता है।
थ्नश्चित समाकल (Definite Integral)	:	यहाँ समाकल का संख्यात्मक मान निष्चित संख्या होता है, और स्वेच्छ अचर विलुप्त कर दिया जाता है।
समाकलन का अचर (Constant of Integration)	:	स्वेच्छ अचर C जो F(x) में जुड़ जाता है।
मानक रूप (Standard forms)	:	जो समाकलों का उपयोग करने को कुछ तैयार।
प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन (Integration by substitution)	:	जब आप प्रदत्त प्रतिस्थापन समाकल्य के लिए प्रतिस्थापन करते हैं और समाकल का मूल्यांकन करने के लिए फलन नियम के फलन का उपयोग करते हैं तो यह प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन कहलाता है।

खंड़ों द्वारा समाकलन (Integration-by-parts) : दो फलनों के गुणनफल का समाकल निकालने की तकनीक

अंतर समीकरण की कोटि (Order of a difference equation) : अंतर समीकरण की कोटि इसमें अंतर्विष्ट उच्चतर अंतर की कोटि है।

समघात अंतर समीकरण (Homogeneous difference equation) : एक अंतर समीकरण समघात (Homogeneous) समीकरण है यदि इसका नियतांक मूल्य (मूल्य जिसमें कोई ल अंतर्विष्ट नहीं है) शून्य है, अन्यथा यह विशमघात (non-homogeneous) समीकरण है।

कॉबवेब मॉडल (Cobweb model) : माँग और पूर्ति की मात्रा का मॉडल है जिसमें माँग चालू मूल्य पर निर्भर करती है और पूर्ति की मात्रा एक अवधि पहले प्रचलित मूल्य पर निर्भर करती है।

ignou
THE PEOPLE'S
UNIVERSITY

कुछ उपयोगी पुस्तकें

चिहांग, अल्पना सी., और केविन वेनराइट, (2005), *फंडामेंटल मैथड्स ऑफ मैथमेटिकल इकॉनामिक्स*, चतुर्थ संस्करण, मैकग्रा–हिल इंटरनेशनल एडीशन, सिंगापुर।

सेडस्टर, कनॉट, और पीटर हम्माण्ड, (1995), *मैथमेटिक्स फॉर इकानॉमिक एनालिसिस*, पीयरसन एजुकेशन इंक, सिंगापुर।

विनस्की, एम., (1981), *इंट्रोडक्टरी मैथमेटिकल मैथड्स इन इकॉनामिक्स*, मैकग्रा–हिल बुक कम्पनी, लंदन।

आर. जी. डी. एलन, *मैथमेटिकल एनालिसिज फॉर इकानामिस्ट*, मैकमिलन इंडिया लिमिटेड, दिल्ली, भारत।

आर. जी. डी. एलन, *मैथमेटिकल इकॉनामिक्स*, द्वितीय संस्करण, सेंट मार्टिन प्रेस, फ्लोरिडा, यू एस ए।

ignou
THE PEOPLE'S
UNIVERSITY